

El conjunto de los números decimales

El conjunto de los números decimales es mucho más complicado que el conjunto de los números enteros. En el nivel 4 de este curso le pondremos nombre y trabajaremos con él. Hasta entonces, será suficiente con ir aprendiendo diversos aspectos de los propios números decimales.

Conjuntos densos

Si un conjunto tiene establecido un orden (es decir, dados dos elementos cualquiera siempre se puede saber cuál es menor), es posible plantearse esta pregunta: dados dos elementos cualquiera del conjunto ¿siempre hay un elemento entre ellos?

Vamos a expresarlo con símbolos, que es como se trabaja habitualmente en matemáticas: si M es un conjunto ordenado (es decir, tiene establecido un orden) y a y b son dos elementos cualesquiera de M de modo que $a < b$, ¿existe un elemento c de M que verifique $a < c < b$?

Si la respuesta es «sí», decimos que el conjunto es denso.

El conjunto de los números enteros no es denso

Si nos dan dos números enteros, a veces podemos encontrar otro situado entre ellos; por ejemplo, a partir de $5 < 7$, encontramos $5 < 6 < 7$.

Pero no siempre se puede: si dos números enteros son consecutivos, entre ellos no hay ningún otro entero; por ejemplo, $8 < 9$ pero no hay ningún número entero entre 8 y 9.

Como no siempre se puede encontrar un número intermedio, el conjunto de los números enteros no es denso.

El conjunto de los números decimales sí es denso

Dados dos números decimales, siempre podemos encontrar otro que esté entre ellos. Por ejemplo, entre 2,4 y 2,5 encontramos 2,41, 2,42, 2,43 y muchos más.

Observa que los números decimales pueden tener cualquier cantidad de cifras decimales. Esa es la clave para saber que el conjunto es denso.

Piensa un número que esté entre 1,2984726 y 1,2984727. Ya ves que es fácil.

Como siempre se puede encontrar un número intermedio, el conjunto de los números decimales es denso.

Propiedad

Si un conjunto es denso, entre cada dos elementos hay infinitos.

Demostración

Entre los elementos a y b podemos encontrar un elemento intermedio, que podemos llamar c_1 . (Usamos un subíndice para nombrar el número porque vamos a seguir obteniendo más números y nos quedaríamos sin letras.)

Entre el elemento a y el elemento c_1 debe haber otro elemento, que podemos llamar c_2 . (También podíamos haberlo encontrado entre b y c_1 .)

Entre el elemento a y el elemento c_2 debe haber otro elemento, que podemos llamar c_3 . (También podíamos haberlo encontrado entre b y c_2 , o entre c_1 y c_2 .)

El procedimiento puede continuar indefinidamente, encontrando c_4 , c_5 , c_6 , c_7 , c_8 , c_9 , c_{10} , c_{11} , etc., luego hay infinitos números entre a y b .

