

Enunciado original del problema

El problema que vamos a resolver en esta hoja fue propuesto originalmente en la VI Olimpiada Matemática Nacional de España con el número 4. Para este curso hemos modificado el enunciado manteniendo su espíritu matemático.

Enunciado

Averigua siete números naturales que verifiquen todas estas condiciones:

- * Son todos diferentes entre sí.
- * Suman 2879.
- * Si se dividen dos cualesquiera, la división es exacta.

Resolución

Imaginamos los números pedidos ordenados de menor a mayor.

Como la división del segundo entre el primero es exacta, el segundo es múltiplo del primero. Igualmente, cada número de esta serie debe ser múltiplo del anterior. Por tanto, la suma debe ser múltiplo del primero.

El número 2879 es primo porque $54^2 > 2879$ y 2879 no es divisible entre ningún número primo menor que 54.

De las dos frases anteriores se deduce que el primer número es 1.

La suma de los seis últimos números es: $2879 - 1 = 2878$.

La descomposición en factores primos de 2878 es $2878 = 2 \cdot 1439$.

Llegamos a la igualdad $2879 = 1 + 2 \cdot 1439$.

El número 1439 también es primo, así que seguimos aplicando la técnica de la descomposición de números en sumas y productos, a ver hasta dónde nos lleva:

$$\begin{aligned}
 2879 &= 1 + 2 \cdot 1439 = 1 + 2 \cdot (1 + 1438) = 1 + 2 + 2 \cdot 1438 = \\
 &= 1 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 719 = 1 + 2 + 4 \cdot 719 = 1 + 2 + 4 \cdot (1 + 718) = \\
 &= 1 + 2 + 4 + 4 \cdot 718 = 1 + 2 + 4 + 4 \cdot 2 \cdot 359 = 1 + 2 + 4 + 8 \cdot 359 = \\
 &= 1 + 2 + 4 + 8 \cdot (1 + 358) = 1 + 2 + 4 + 8 + 8 \cdot 358 = \\
 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 8 \cdot 2 \cdot 179 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \cdot 179 = \\
 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \cdot (1 + 178) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 16 \cdot 178 = \\
 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 16 \cdot 2 \cdot 89 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \cdot 89 = \\
 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \cdot (1 + 88) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 32 \cdot 88 = \\
 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 2816.
 \end{aligned}$$

Hemos usado la propiedad distributiva todos los pasos en los que eliminamos los paréntesis y siempre hemos ido obteniendo nuevos números que son múltiplos de los anteriores.

El método utilizado no solo llega a la solución, sino que demuestra que es única.

Solución

1, 2, 4, 8, 16, 32 y 2816