Potencia con exponente entero de una fracción

Para dar un sentido correcto a las potencias con exponente entero de una fracción hay que tener en cuenta varias cosas:

- ✱ Las potencias con exponente natural de una fracción ya tienen unas propiedades importantes que están demostradas.
- ✱ La definición de potencia con exponente entero debe dar el mismo resultado que la definición de potencia con exponente natural para los casos en que se puedan aplicar las dos.
- ✱ Hay definir la potencia con exponente entero de manera que las propiedades de la potencia con exponente natural sigan siendo válidas.

Por tanto, vamos a definir las potencias con exponente 0 y con exponente negativo inspirándonos en las propiedades de las potencias.

Como todos los números enteros son también fracciones, las nuevas definiciones de potencia también serán aplicables cuando la base sea un número entero.

Potencia con exponente 0 de una fracción

Recordamos que el cociente de potencias de la misma base se puede escribir como una potencia de la misma base y con el exponente la diferencia de exponentes; simbólicamente, $a^m : a^n = a^{m-n}$ (donde «a» representa cualquier fracción).

Si dividimos dos potencias exactamente iguales, el resultado deber ser 1, como en cualquier otra división en la que el numerador y el denominador sean iguales; simbólicamente, $a^n : a^n = 1$ (donde «a» representa cualquier fracción).

Por tanto, la expresión $a^n : a^n$ debería poder calcularse de dos maneras:

Primera manera → $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$; segunda manera → $a^n : a^n = 1$

Llegamos a la conclusión de que hay que **definir** $a^0 = 1$.

Potencia con exponente negativo de una fracción

Para entender la definición es más fácil comenzar por un ejemplo: supongamos que «a» representa una fracción cualquiera y vamos a trabajar con la expresión $a^3 : a^5$.

Por un lado, aplicando la propiedad del cociente de potencias de la misma base, deberíamos obtener $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$.

Por otro lado, para hacer la división podemos simplificar tres factores en el dividendo con tres factores del divisor: $a^3 : a^5 = (a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) = 1 : (a \cdot a) = 1 : a^2$.

Por tanto, habría que definir $a^{-2} = 1 : a^2$. Observamos que -2 y 2 son opuestos entre sí, así que la definición de a^n cuando n es negativo deber ser $a^n = 1 : a^{-n}$. Observa que si n es negativo, $-n$ es positivo.

Definición

Si «a» es una fracción y «n» es un número entero, se define a^n así:

- Si $n > 0$, $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n factores)
- Si $n = 0$, $a^n = 1$
- Si $n < 0$, $a^n = 1 : a^{-n}$

Ejemplos

Ejemplo 1: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$; ej. 2: $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$; ej. 3: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 : \frac{16}{81} = \frac{81}{16}$

