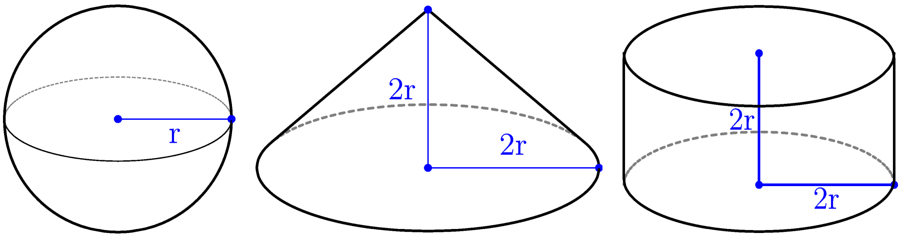
Volumen de una esfera

En el profundo estudio que hizo Arquímedes de la esfera también consiguió demostrar una fórmula para calcular su volumen. Para ello, utilizó tres figuras:

* Una esfera de radio *r*. Llamaremos V a su volumen.
* Un cono de radio de la base y altura $2 \cdot r$ (igual que el diámetro de la esfera). Llamaremos V_{Cono} a su volumen.
* Un cilindro de radio de la base y altura $2 \cdot r$ (igual que el diámetro de la esfera). Llamaremos $V_{Cilindro}$ a su volumen.



Aristóteles demostró usando un razonamiento basado en la ley de las palancas (que había estudiado con anterioridad) y en dar cortes muy finos a las tres figuras que $2 \cdot (V + V_{Cono}) = V_{Cilindro}$. A partir de esa relación se puede llegar a la fórmula del volumen de la esfera con bastante sencillez:

$$2 \cdot (V + V_{Cono}) = V_{Cilindro} \Rightarrow 2 \cdot \left(V + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^2 \cdot (2r)\right) = \pi \cdot (2r)^2 \cdot (2r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(V + \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right) = 8 \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow V + \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 4 \cdot \pi \cdot r^3 \Rightarrow$$

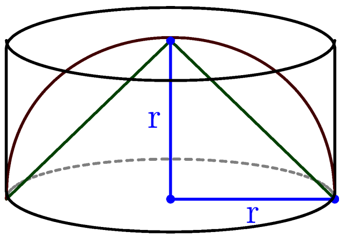
$$\Rightarrow V = 4 \cdot \pi \cdot r^3 - \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

La fórmula del volumen de la esfera, por tanto, queda así:

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$

Volúmenes de semiesfera, cilindro y cono de las mismas dimensiones

Consideramos tres figuras que encajan perfectamente una dentro de otra:



* Un cono de radio de la base *r* y altura *r*.

  Su volumen es $V_{Cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{\mathbf{1}}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

* Una semiesfera de radio *r*.

  Su volumen es la mitad del de la esfera: $V_{Semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{\mathbf{2}}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

* Un cilindro de radio de la base *r* y altura *r*.

  Su volumen se puede escribir así: $V_{Cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{\mathbf{3}}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Observamos que las relaciones entre los volúmenes siguen la misma relación que los números naturales 1, 2 y 3 y que

$$\boxed{V_{Cono} + V_{Semiesfera} = V_{Cilindro}}$$

