Preparación para demostrar la fórmula de la ecuación de segundo grado

En el nivel 2 conociste la ecuación que permite resolver las ecuaciones de segundo grado completas, pero no vimos la demostración. Ahora que has aprendido en qué consiste la factorización de polinomios y la has practicado, vas a poder entender la demostración de la fórmula.

Ejemplos

Resuelve las siguientes ecuaciones; da cada solución como número entero o fracción irreducible.

① $(6x+1)^2 = 25$ ② $4x^2-12x+9 = 49$ ③ $x^2+4x+3 = 0$

Resolución 1: vemos que se trata de una ecuación con una sola aparición de la incógnita; por tanto, le aplicaremos el conocido método de despejar la incógnita eliminando las operaciones que la acompañar en el orden inverso al de cálculo. Comenzaremos por eliminar el cuadrado, luego el 1 y luego el 6. Lo interesante es que hay dos números que elevados al cuadrado dan 25, por lo que desde el primer paso veremos que hay dos posibilidades y habrá que tener en cuenta las dos.

$$(6x+1)^2 = 25 \Rightarrow 6x+1 = \pm\sqrt{25} \Rightarrow 6x+1 = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases} \Rightarrow 6x = \begin{cases} 5-1 \\ -5-1 \end{cases} \Rightarrow 6x = \begin{cases} 4 \\ -6 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{4}{6} \\ \frac{-6}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -1 \end{cases}. \text{ Solución: } x = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -1 \end{cases}$$

Resolución 2: está claro que esta ecuación es muy poco realista, es difícil que te aparezca en un ejercicio o en un problema; pero la intención al presentártela es que veas la clave de esta técnica. Observa el problema: en la ecuación aparece la incógnita dos veces: una al cuadrado y otra sin potencia; pero si observamos que el primer miembro es el cuadrado de una diferencia, podemos factorizarlo, la incógnita ya solo aparecerá una vez y usamos la técnica del ejemplo (1). ¡Brillante!

$$4x^2-12x+9 = 49 \Rightarrow (2x-3)^2 = 49 \Rightarrow 2x-3 = \pm\sqrt{49} \Rightarrow 2x-3 = \begin{cases} 7 \\ -7 \end{cases} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 7+3 \\ -7+3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \begin{cases} 10 \\ -4 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{10}{2} \\ \frac{-4}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}. \text{ Solución: } x = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

Resolución 3: el primer miembro no es el cuadrado de una suma, pero casi: basta añadirle una unidad para que lo sea.

$$x^2+4x+3 = 0 \Rightarrow x^2+4x+4 = 1 \Rightarrow (x+2)^2 = 1 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x+2 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 1-2 \\ -1-2 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}. \text{ Solución: } x = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

Clave de la demostración

Estos tres ejemplos nos muestran que la idea principal es factorizar un polinomio usando algún producto notable, pero que también será necesario aplicar algún ajuste adicional para preparar la aparición del producto notable.