Teorema del resto

Si se divide un polinomio entre el polinomio «x–a», el resto de la división es igual al valor numérico del polinomio en «a».

Ejemplo

Dado el polinomio $Q(x)=2x^3-3x^2+x-1$, se pide:

a) Calcular el resto de la división de Q(x) entre el polinomio «x–2».

b) Calcular el valor numérico Q(2).

c) Comprobar que los dos anteriores apartados tienen la misma solución.

Resolución

a) Calculamos el resto haciendo la división mediante la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & & 4 & 2 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & \mathbf{5} \end{array}$$

Solución: el resto de la división es 5.

b) $Q(2) = 2\cdot 2^3-3\cdot 2^2+2-1 = 2\cdot 8-3\cdot 4+1 = 16-12+1 = 5$. Solución: $Q(2)=5$.

c) Efectivamente, el resto es 5 y el valor numérico es 5, coinciden.

Demostración

Llamamos «P(x)» a un polinomio cualquiera y «a» a un número cualquiera.

Cuando dividimos P(x) entre el polinomio «x–a» se obtiene:

* El cociente, que es un polinomio y llamamos C(x)
* El resto, que debe ser un polinomio de grado menor que 1 (el grado del divisor); por tanto, el resto debe ser un polinomio de grado 0; es decir, debe ser un número. Llamamos R al resto de la división.

Sabemos como consecuencia de las propiedades de la división que

$$P(x) = C(x)\cdot(x-a) + R$$

En esta igualdad de polinomios podemos calcular el valor númerico en «a»:

$$P(a) = C(a)\cdot(a-a) + R$$

Ahora viene la clave de la demostración: como $a-a=0$, sabemos que el producto $C(a)\cdot(a-a)$ será 0 aunque no sabemos el valor de C(a).

$$P(a) = C(a)\cdot 0 + R = 0 + R = R$$

Queda demostrado que $R = P(a)$.

Enunciado

Comprueba el teorema del resto usando el polinomio $T(x)=x^4+x^3-4x^2-7x-11$ y el número $a=-3$.

Resolución

Calculamos el resto de la división de T(x) entre x+3:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -4 & -7 & -11 \\ -3 & & -3 & 6 & -6 & 39 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -13 & \mathbf{28} \end{array}$$

Calculamos el valor numérico T(–3):

$T(-3) = (-3)^4+(-3)^3-4\cdot(-3)^2-7\cdot(-3)-11 = 81-27-36+21-11 = 28$

Efectivamente, coinciden el resto de la división y el valor numérico.

