Factorización de un polinomio usando división exacta

1. Si el número «a» es una raíz del polinomio P(x), P(a) = 0 por definición de raíz.
2. Pero, por el teorema del resto, P(a) es igual al resto de la división del polinomio entre x–a.
3. Por tanto, si «a» es una raíz del polinomio P(x), al dividir P(x) entre x–a se obtendrá de resto 0, la división será exacta.
4. Si llamamos C(x) al cociente de la división entre P(x) y x–a, se verificará

$$\boxed{P(x) = C(x)\cdot(x-a)}$$

5. Así pues, habremos conseguido una factorización del polinomio.

Ejemplo 1

Consideramos el polinomio $Q(x) = x^3-3x^2+5x-6$. Observamos (luego veremos cómo) que el número 2 es una raíz, ya que Q(2) = 0.

Dividimos Q(x) entre x–2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 5 & -6 \\ 2 & & 2 & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

Cociente: x^2-x+3, resto: 0. Por tanto, $x^3-3x^2+5x-6 = (x^2-x+3)(x-2)$

Obtención de raíces de un polinomio

1. Sabemos que si todos los coeficientes de un polinomio son números enteros, todas las raíces del polinomio que sean números enteros son divisores del monomio de grado cero (el término independiente).
2. Por tanto, debemos ir probando entre los divisores del término independiente (tanto los positivos como los negativos) si alguno de ellos es raíz.
3. La prueba la podemos hacer calculando directamente el valor numérico del polinomio (viendo si da 0 o no) o averiguando el resto de la división entre x menos la posible raíz, ya que, por el teorema del resto, deben dar el mismo valor. Usaremos el método que nos parezca más rápido, pero dividir tiene la ventaja de que ya tendremos calculado el cociente si encontramos una raíz.

Ejemplo 2

Consideramos el polinomio $R(x) = x^3+3x^2+7x+10$.

El término independiente es 10. Sus divisores son 1, –1, 2, –2, 5, –5, 10 y –10.

Alguno de ellos podría ser raíz del polinomio.

Probamos con 1: $R(1) > 0$ (obviamente), luego $R(1) \neq 0$; 1 no es raíz.

Probamos con –1: $R(-1) = -1+3-7+10 \neq 0$; –1 no es raíz.

Probamos con 2: $R(2) > 0$ (obviamente), luego $R(2) \neq 0$; 2 no es raíz.

Probamos con –2: dividimos R(x) entre x+2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 7 & 10 \\ -2 & & -2 & -2 & -10 \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 0 \end{array}$$

Cociente: x^2+x+5, resto: 0. Por tanto, –2 sí es raíz

Podemos factorizar; además, ya tenemos hecha la división:

$x^3+3x^2+7x+10 = (x^2+x+5)(x+2)$

