

Demostraciones en matemáticas

Las demostraciones ocupan un lugar central en matemáticas, pero se consideran más difíciles que la mera aplicación de las propiedades. Es conveniente que poco a poco te vayas acostumbrando a ver demostraciones; en el futuro, quizá tengas que inventarlas tú.

Propiedad 1

Si la representación gráfica de una función cuadrática tiene dos puntos de corte con el eje de abscisas, la abscisa del vértice es la media aritmética de las abscisas de los puntos de corte con el eje de abscisas.

Ejemplo

Si los puntos de corte son $(-6,0)$ y $(14,0)$, la abscisa del vértice será $\frac{-6+14}{2} = 4$.

Demostración

La expresión analítica de la función cuadrática es $y = ax^2 + bx + c$. Averiguamos las abscisas de los puntos de corte:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

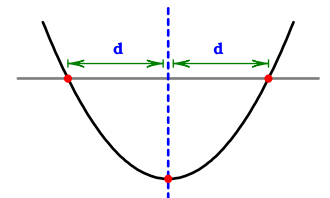
Calculamos la media aritmética:

$$\frac{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{2} = \frac{-2b}{4a} = \frac{-b}{2a}$$

y, efectivamente, obtenemos la abscisa del vértice.

Observación

Otra manera de entender esta propiedad consiste en observar que los dos puntos de corte con el eje de abscisas son simétricos respecto al eje de la parábola.



Propiedad 2

Si la representación gráfica de una función cuadrática tiene un solo punto de corte con el eje de abscisas, el punto de corte es el vértice.

Ejemplo

Si el único punto de corte es $(7,0)$, el vértice es $(7,0)$.

Demostración

La expresión analítica de la función cuadrática es $y = ax^2 + bx + c$.

Si la representación gráfica tiene un solo punto de corte con eje de abscisas es porque la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ solo tiene una solución, que calculamos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a}, \text{ que es, efectivamente, la abscisa del vértice.}$$

Observación

Otra manera de entender esta propiedad consiste en observar que el vértice es el simétrico de sí mismo respecto al eje de la parábola y relacionarla con la propiedad anterior.

