Definición por recurrencia de una sucesión

Consiste en definir el valor del término general de la sucesión basándose en los valores de uno o más de sus términos anteriores.

Ejemplo 1

Consideramos la sucesión $a \to 7, 10, 13, 16,\ldots.$

Se ve que cada término se puede obtener sumando 3 al término anterior; por tanto, podemos escribir «$a_n = a_{n-1} + 3$» como expresión del término general. Pero esta expresión no tiene sentido para «$n = 1$», ya que diría «$a_1 = a_0 + 3$»; pero a_0 no existe, no hay ningún término anterior al primero.

Por tanto la expresión del término general habría que escribirla así:

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}+3 & \text{si } n>1 \\ 7 & \text{si } n=1 \end{cases}$$

Resulta más habitual escribirla de un modo más sencillo, porque todo el mundo va a entender que a_{n-1} no existe para «$n = 1$»:

$a_1 = 7;\ a_n = a_{n-1} + 3$

Ejemplo 2

Consideramos la sucesión $b \to 3, 6, 12, 24,\ldots.$

Cada término se puede obtener multiplicando por 2 el término anterior, salvo el primero, que vale 3. Escribimos el término general del modo más sencillo:

$b_1 = 3;\ b_n = 2 \cdot b_{n-1}$

Ejemplo 3

La conocida sucesión de Fibonacci se define como aquella que tiene los dos primeros términos «1» y a partir de ahí cada término es la suma de los dos anteriores. Si llamamos f a la sucesión, su término general es:

$f_1 = f_2 = 1;\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Aplicando la definición, se obtiene: $f \to 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,\ldots$

Esta sucesión es un clásico de la matemática. Expresa la cantidad de parejas de conejos que se van obteniendo con ciertas condiciones en su reproducción.

Forma explícita del término general

Una definición recursiva de una sucesión plantea un problema práctico importante: para calcular un término hace falta conocer todos los anteriores, lo que requiere un gran esfuerzo de cálculo. Por eso, existen técnicas para obtener versiones no recursivas (es decir, explícitas) a partir de definiciones recursivas.

Es fácil ver que en el ejemplo 1 se verifica «$a_n = 3n + 4$» y en el ejemplo 2 la expresión es «$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$»; con los conocimientos que adquiriremos en este nivel tú podrás averiguar estas expresiones. Pero la que es más difícil de obtener es la del ejemplo 3, que es:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Se conoce como fórmula de Binet, en honor al matemático francés Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856), aunque ya era conocida anteriormente.