

### Suma de los primeros términos de una progresión aritmética

Se desea calcular la suma de los primeros términos de una progresión aritmética del modo más sencillo posible. Para obtener esa expresión sencilla de la suma, antes es necesario observar y utilizar una propiedad de las progresiones aritméticas.

#### Ejemplo 1

**Enunciado:** calcula la suma de los seis primeros términos de la progresión aritmética  $a \rightarrow 7, 10, 13, 16, 19, 22, \dots$

**Resolución:** como solo hay seis sumandos, podemos hacer directamente la suma sin dificultad:  $7+10+13+16+19+22 = 87$ . Solución: 87.

También podemos darnos cuenta de que  $7+22 = 29$ ,  $10+19 = 29$  y  $13+16 = 29$ , con lo que la operación de suma se podría hacer así:  $29 \cdot 3 = 87$ , ya que hay tres sumas.

#### Ejemplo 2

**Enunciado:** calcula la suma de los 18 primeros términos de la progresión aritmética  $b \rightarrow 11, 28, 45, 62, 79, 96, 113, 130, 147, 164, 181, 198, 215, 232, 249, \dots$

**Resolución:** ahora hay más sumandos que antes, la suma empieza a ser más difícil de realizar en la práctica, por lo que es más necesario encontrar un método alternativo. Nos damos cuenta de que  $11+249 = 260$ ,  $28+232 = 260$ ,  $45+215 = 260$ , etc.

Por tanto, la operación de la suma se puede hacer así:  $260 \cdot 9 = 2340$ , ya que hay nueve sumas que dan el resultado 260. Solución: 2340.

#### Ejemplo 3

**Enunciado:** calcula la suma de los 246 primeros términos de la progresión aritmética  $c \rightarrow 8, 19, 30, 41, \dots$

**Resolución:** cuando el número de sumandos es realmente alto, hay que encontrar métodos más eficientes. Esto es una parte importante de la matemática.

Comenzamos por calcular la diferencia:  $d = c_2 - c_1 = 19 - 8 = 11$

Calculamos el último término que hay que sumar:

$$c_{246} = c_1 + (246-1)d = 8 + 245 \cdot 11 = 21\,560.$$

Y ahora el punto clave de todo el método: el primer término y el último suman lo mismo que el segundo y el penúltimo:  $c_1 + c_{246} = c_2 + c_{245} = 21\,568$ . Observa cómo lo podemos saber incluso sin hacer operaciones con números:

$$c_2 + c_{245} = (c_1+d) + (c_{246}-d) = c_1 + d + c_{246} - d = c_1 + c_{246}$$

Como hay que sumar 246 términos, los podemos emparejar formando  $246 : 2 = 123$  parejas. Y como cada pareja suma 21 568, el total es  $21\,568 \cdot 123 = 2\,652\,864$ .

Solución: 2 652 864.

#### Ejemplo 4

**Enunciado:** calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión aritmética  $e \rightarrow 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots$

**Resolución:** en los tres ejemplos anteriores el número de términos que había que sumar era par y los podíamos emparejar perfectamente. Ahora el número de términos es impar, pero podemos aplicar el mismo procedimiento que antes porque la suma del primero y el último es el doble que el término central:  $1 + 25 = 2 \cdot 13$  y por tanto podemos considerar que el número de parejas es  $\frac{7}{2}$ .

$$\text{Suma} = (1+25) \cdot \frac{7}{2} = 26 \cdot \frac{7}{2} = 13 \cdot 7 = 91. \text{ Solución: } 91.$$