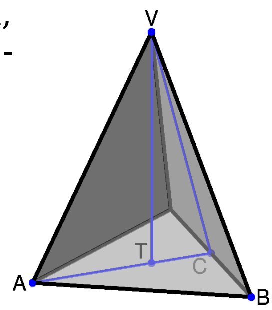
Área y volumen de una pirámide regular

En el nivel 2 vimos que los resultados en este problema suelen ser inexactos. Ha llegado el momento de usar la calculadora para calcularlos con buena aproximación.

Ejemplo

Enunciado. Calcula con cuatro cifras significativas el área y el volumen de una pirámide recta cuya base es un triángulo equilátero de 7 metros de lado sabiendo que las demás aristas miden 11 metros.



Resolución. Utilizamos la notación de la ilustración de la derecha, con cuatro triángulos rectángulos: ABC, ATV, VTC y VCB. En general, según qué datos dé el enunciado, se usarán unos u otros.

Datos: $\overline{\mathrm{AB}} = 7$ y $\overline{\mathrm{AV}} = 11$

Altura de la pirámide: $\overline{\mathrm{VT}} = h$; apotema de la pirámide: $\overline{\mathrm{VC}} = m$

Altura de la base: $\overline{\mathrm{AC}} = a$; apotema de la base: $\overline{\mathrm{TC}}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC:

$$\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 \Rightarrow a^2+3{,}5^2 = 7^2 \Rightarrow a = \sqrt{7^2-3{,}5^2} = 6{,}062$$

Calculadora: √‾ (4 9 – 3 . 5 x^2) = ⇨ 6,062177826

Aunque hemos escrito abreviado el valor numérico de a, deberemos usar su valor tal como lo hemos obtenido en la calculadora, así que lo guardamos en una memoria de la calculadora: Ans STO A

Habrá que usar el área de la base para responder a dos preguntas, así que tiene sentido calcularla independientemente y almacenar el resultado en una memoria:

Área de la base = $A_B = \overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}:2 = 7\cdot a:2 = 21{,}21$.

Calculadora: 7 × Ans ÷ 2 STO B = ⇨ 21,21762239

En este ejemplo el polígono regular de la base es un triángulo equilátero y por eso se da una circunstancia que no se da en los demás polígonos regulares: el radio de la base (AT) y la apotema de la base (TC) están relacionados de una forma muy sencilla, ya que juntos forman la altura y la mediana de la base. Como el punto T es el baricentro de la base, sabemos que dista el doble de A que de C: $\overline{\mathrm{AT}} = 2\cdot\overline{\mathrm{TC}}$.

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo VCB:

$$\overline{\mathrm{VC}}^2+\overline{\mathrm{CB}}^2 = \overline{\mathrm{VB}}^2 \Rightarrow m^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2 = 11^2 \Rightarrow m = \sqrt{11^2-\left(\frac{1}{3}\cdot a\right)^2} = 10{,}81$$

Calculadora: √‾ (1 1 x^2 – (RCL A ÷ 3) x^2) = ⇨ 10,81280106

Área = $A_B+3\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot m:2 = 21{,}21+3\cdot 7\cdot 10{,}81:2 = 134{,}8$

Calculadora: RCL B + 2 1 × Ans ÷ 2 = ⇨ 134,7520335

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ATV:

$$\overline{\mathrm{VT}}^2+\overline{\mathrm{AT}}^2 = \overline{\mathrm{VA}}^2 \Rightarrow h^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = 11^2 \Rightarrow h = \sqrt{11^2-\left(\frac{2}{3}\cdot a\right)^2} = 10{,}23$$

Calculadora: √‾ (1 1 x^2 – (2 ÷ 3 × RCL A) x^2) = ⇨ 10,23067284

Volumen = $A_B\cdot h:3 = 21{,}21\cdot 10{,}23:3 = 72{,}36$

Calculadora: RCL B × Ans ÷ 3 = ⇨ 72,35685102

Solución → área: 134,8 m², volumen: 72,36 m³

