

Raíces de un polinomio y ecuación factorizada igualada a cero

Calcular las raíces de un polinomio y resolver una ecuación factorizada igualada a cero son dos versiones del mismo problema que se van complementando. Mostramos con un ejemplo cómo se van entremezclando.

Ejemplo

Enunciado 1: factoriza el polinomio x^6-1 .

Enunciado 2: resuelve la ecuación $x^6-1 = 0$.

Resolución

Comenzamos por una idea muy sencilla que facilita mucho la tarea; vemos que la expresión x^6-1 es la diferencia de dos cuadrados, así que se puede aplicar una identidad notable:

$$x^6-1 = (x^3+1)(x^3-1)$$

El valor $x=-1$ es raíz del polinomio x^3+1 , como se aprecia a simple vista, luego se puede dividir de manera exacta x^3+1 entre $x+1$ (por ejemplo, mediante la regla de Ruffini), para obtener $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$.

El polinomio x^2-x+1 no tiene raíces reales, luego es irreducible:

$$x^2-x+1=0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \text{sin solución}$$

El valor $x=1$ es raíz del polinomio x^3-1 , como se aprecia a simple vista, luego se puede dividir de manera exacta x^3-1 entre $x-1$ (por ejemplo, mediante la regla de Ruffini), para obtener $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$.

El polinomio x^2+x+1 no tiene raíces reales, luego es irreducible:

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \text{sin solución}$$

Solución del enunciado 1: $x^6-1 = (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

Para resolver la ecuación $x^6-1 = 0$ comenzamos por utilizar la factorización anterior para convertir la ecuación en una ecuación factorizada igualada a 0:

$$x^6-1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 & \Rightarrow x=-1 \\ x^2-x+1=0 & \rightarrow \text{sin solución} \\ x-1=0 & \Rightarrow x=1 \\ x^2+x+1=0 & \rightarrow \text{sin solución} \end{cases}$$

Solución del enunciado 2: $x = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

Observación: en el proceso de factorización ya hemos tenido que ir calculando todas las raíces.