

Definición de máximo común divisor de varios polinomios

Llamamos polinomio máximo común divisor de varios polinomios a cualquier polinomio que sea divisor de todos ellos y que verifique que no hay ningún polinomio de grado superior al suyo que también sea divisor de todos.

Notación

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, su polinomio máximo común divisor se escribe $\text{MCD}(P(x), Q(x))$.

Observación

Hay infinitos polinomios que son el polinomio máximo común divisor de varios polinomios, pero cualquiera de ellos se puede obtener multiplicando otro por una constante distinta de cero. Por tanto, se dice que el polinomio máximo común divisor es único salvo una constante.

Cálculo del máximo común divisor de varios polinomios

Paso 1. Se factorizan todos los polinomios de los que hay que calcular el máximo común divisor.

Paso 2. El polinomio máximo común divisor es el producto de un número cualquiera distinto de cero y de todos los factores comunes a todos los polinomios; es muy común dejarlo factorizado.

Ejemplo 1

Enunciado. Averigua el máximo común divisor de los polinomios

$$P(x) = 2x^2 + 13x + 15 \text{ y } Q(x) = 2x^2 - 5x - 12.$$

Resolución

$$\text{Factorizamos } P(x): P(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 13x + 15 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ -5 \end{cases} . P(x) = 2(x + \frac{3}{2})(x + 5)$$

$$\text{Factorizamos } Q(x): Q(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{4}{3} \\ -\frac{3}{2} \end{cases} . Q(x) = 2(x - 4)(x + \frac{3}{2})$$

Vemos que el único polinomio que es factor común de $P(x)$ y de $Q(x)$ es $(x + \frac{3}{2})$, que ya podríamos dar como solución. Pero, si nos viene bien, podemos multiplicarlo por cualquier número distinto de cero. Por ejemplo, si multiplicamos por 2 eliminamos la fracción: $2(x + \frac{3}{2}) = 2x + 3$. Podemos dar como solución cualquiera de las dos posibilidades, todo depende de dónde lo tengamos que usar.

$$\text{Solución: } \text{MCD}(P(x), Q(x)) = 2x + 3$$

Ejemplo 2

Enunciado. Averigua el máximo común divisor de los polinomios

$$A(x) = (x - \frac{1}{2})(x + 1)(x + \frac{1}{3}), B(x) = (x + 8)(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3}) \text{ y } C(x) = (x - \frac{1}{2})(x - 31)(x + \frac{1}{3})$$

Resolución

Los polinomios ya están factorizados. Multiplicamos por 6 los factores comunes: $6 \cdot (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3}) = (2x - 1)(3x + 1)$. Solución: $\text{MCD}(A(x), B(x), C(x)) = (2x - 1)(3x + 1)$