Ecuaciones exponenciales

Son ecuaciones en las que la incógnita está en el exponente.

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4	Ejemplo 5
$2^x = 32$	$9^x+3^x = 90$	$5^x = 83$	$4^x+2^x = 7$	$x+2^x = 0$

Las ecuaciones de los ejemplos (1) y (2) son las que vamos a resolver en esta sección del curso. Las ecuaciones de los ejemplos (3) y (4), pese a lo mucho que se parecen a las anteriores, las resolveremos en la sección siguiente, porque es necesario utilizar logaritmos. La ecuación del ejemplo (5) requiere técnicas más generales y avanzadas, que estudiaremos en el nivel 6 del curso.

Ecuaciones exponenciales simples

Aunque no existe una nomenclatura establecida para clasificar las ecuaciones exponenciales, en este curso llamaremos así a las ecuaciones que tienen el aspecto de los ejemplos (1) y (3), o bien se pueden trasformar fácilmente en ese aspecto.

Estas ecuaciones se resuelven escribiendo dos potencias de la misma base, una en cada miembro de la ecuación, e igualando los exponentes.

Ejemplo 6

Enunciado: resuelve la ecuación $3^x = 81$

Resolución: $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$. Solución: $x = 4$

Comentario: como ves, ha sido necesario reconocer que $81 = 3^4$; esta es la mayor dificultad del método, ya que no siempre seremos capaces de averiguar cómo escribir un número como una potencia de cierta base. Para eso nos servirán más adelante los logaritmos.

Justificación del método explicado

El método que hemos explicado para resolver ecuaciones exponenciales simples se basa en que la función exponencial es inyectiva. Cuando una función es inyectiva, dos valores diferentes de la variable independiente tienen imágenes diferentes:

- Si la función f es inyectiva, se verifica: $p \neq q \Rightarrow f(p) \neq f(q)$

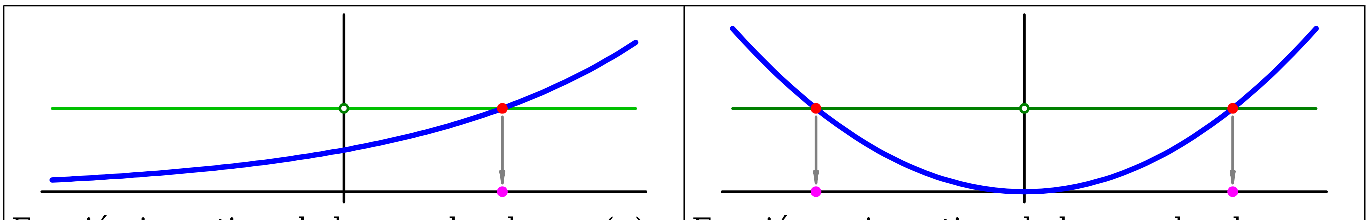
Y esta propiedad es lógicamente equivalente a esta:

- Si la función f es inyectiva, se verifica: $f(p) = f(q) \Rightarrow p = q$

En nuestro caso hemos deducido $3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$.

Si una función no es inyectiva, no podemos hacer la deducción. Por ejemplo, la función cuadrado «$g(x) = x^2$» no es inyectiva porque $g(3) = g(-3) = 9$, así que la siguiente deducción es **errónea**: $3^2=(-3)^2 \Rightarrow 3 = -3$.

Gráficamente se puede ver así: si una función es inyectiva, cada recta horizontal corta como máximo una vez a la gráfica de la función y si una función no es inyectiva, alguna recta horizontal corta más de una vez a la gráfica de la función.



Función inyectiva: dado un valor de «y» (○), solo puede haber un valor de «x» (●).

Función no inyectiva: dado un valor de «y» (○), puede haber más de un valor de «x» (●).

