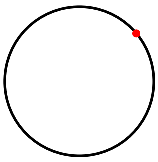
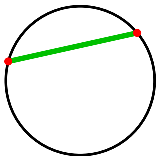
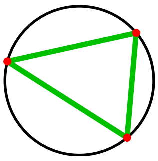
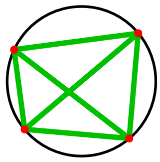
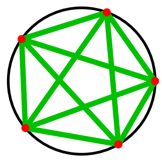
El problema del círculo de Moser

Enunciado: si se seleccionan varios puntos en una circunferencia, ¿cuál es el número máximo de regiones internas al círculo que quedan determinadas cuando se trazan todos los segmentos que unen dos de los puntos?

Convenio: llamaremos «R(n)» al número máximo de regiones determinadas cuando se usan «n» puntos.

Ejemplos. Mostramos los primeros valores de R(n):

				
$R(1) = 1$	$R(2) = 2$	$R(3) = 4$	$R(4) = 8$	$R(5) = 16$

Primer impulso. La primera impresión es pensar que como los números obtenidos son potencias de dos, R(6) tendrá que ser la siguiente potencia de dos, 32. ¡Pero es falso! Usar ejemplos sencillos para resolver problemas complicados es un magnífico método para buscar soluciones, pero debemos dar con un razonamiento que nos sirva para explicar todos los ejemplos, y en este caso no hay ninguno que pueda explicar por qué todos los resultados de R(n) deben ser potencias de dos.

Enunciados

① Averigua la fórmula combinatoria que hay que utilizar para determinar cuántas cuerdas de la circunferencia se trazan cuando se utilizan «n» puntos, para valores de «n» mayores que 1.

② Averigua la fórmula combinatoria que hay que utilizar para determinar cuántos puntos de intersección de las cuerdas se obtienen, como máximo, cuando se utilizan «n» puntos, para los valores de «n» mayores que 3.

Solución del problema del círculo de Moser

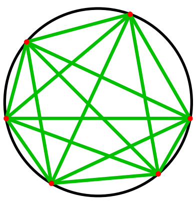
Usando solamente técnicas de enseñanza secundaria, se puede llegar a entender la demostración de la solución de este problema. El número de regiones es

$$\boxed{R(n) = C_{n,4} + C_{n,2} + 1}$$

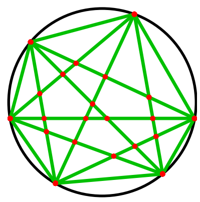
Ejercicio

③ Usando la fórmula de la solución del problema del círculo de Moser, calcula el valor R(6).

Idea clave de la demostración



A la izquierda vemos un gráfico genérico de R(6). A la derecha, hemos añadido los puntos de intersección de las cuerdas y dividido estas en varios segmentos. Hay 21 puntos y 51 segmentos (contando los arcos).



Se cumple una propiedad deducida a partir de la característica de Euler de los poliedros regulares: Puntos – Segmentos + Regiones = 1.

Por tanto, Regiones = Segmentos – Puntos + 1 = 51–21+1 = 31.

Soluciones

① $C_{n,2}$

② $C_{n,4}$

③ 31

Métodos

Casi todos los problemas se pueden resolver de múltiples formas. Esto es particularmente cierto en los problemas que se resuelven usando combinatoria. Ofrecemos el método que hemos utilizado para llegar a las soluciones, sabiendo que tu método puede ser distinto.

① Cada dos puntos se pueden unir con una cuerda y no importa el orden.

② Cuatro puntos determinan dos cuerdas que se cortan en el interior.