Diferencia simétrica de dos conjuntos

- La diferencia simétrica de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno de los dos conjuntos pero no al otro.
- El símbolo para indicar la diferencia simétrica de dos conjuntos puede ser «Δ» (se llama «incremento» y es muy parecido a la letra griega delta mayúscula, pero no idéntico) o «⊖». En este curso usaremos «Δ».
- Esta operación, al contrario que la diferencia de conjuntos, sí es conmutativa.
- Ejemplo 1. $\{a,b,c\}\Delta\{c,d,e\} = \{a,b,d,e\}$
- Ejemplo 2. $\{f,g,h,i\}\Delta\{h,i,j,k\} = \{f,g,j,k\}$
- Ejemplo 3. $\{p,q,r\}\Delta\{s,t,u\} = \{p,q,r,s,t,u\}$

Definición con símbolos

Aunque la definición con palabras es perfectamente válida, es conveniente en este nivel de estudios ir acostumbrándose a ver también las definiciones simbólicas, porque son las que se usarán más adelante para realizar demostraciones.

Vamos con la definición:

$$\boxed{\text{Sean A y B dos conjuntos. } A\Delta B = \{x \mid (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\in B \wedge x\notin A) \}}$$

Se lee así: A diferencia simétrica con B es igual al conjunto de elementos x tales que o bien x pertenece a A y x no pertenece a B o bien x pertenece a B y x no pertenece a A. (Los paréntesis son difíciles de pronunciar, por eso hemos hecho la pequeña variación de usar dos veces «o bien»).

Propiedades

Sea A un conjunto. Se verifica:

- $A\Delta A=\varnothing$. La diferencia simétrica de un conjunto consigo mismo es el conjunto vacío.
  - Ejemplo 4. $\{b,c,d\}\Delta\{b,c,d\} = \varnothing$
- $A\Delta\varnothing=A$. La diferencia de un conjunto con el vacío es el conjunto original.
  - Ejemplo 5. $\{e,f,g\}\Delta\varnothing = \{e,f,g\}$

Sean A y B dos conjuntos.

- $A\subset B \Rightarrow A\Delta B=B-A$. La diferencia simétrica de un conjunto con un subconjunto suyo es igual a la diferencia entre el superconjunto y el subconjunto.
  - Ejemplo 6. $\{a,c,f\}\Delta\{a,b,c,e,f\} = \{b,e\}$
- $A\Delta B=A\cup B-A\cap B$. La diferencia simétrica de dos conjuntos es igual a la unión de los dos conjuntos menos su intersección.

  Aunque no hemos definido las operaciones combinadas entre conjuntos, es fácil ver que el segundo miembro de esta igualdad lo es; en ella, la operación que tiene menor jerarquía es la diferencia, que, por tanto, es la última que hay que realizar.
  - Ejemplo 7. Sean $A=\{c,d,e,f\}$ y $B=\{e,f,g,h\}$

    Se verifica: $A\Delta B=\{c,d,g,h\}$ y $A\cup B-A\cap B=\{c,d,e,f,g,h\}-\{e,f\}=\{c,d,g,h\}$
- $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$. La diferencia simétrica de dos conjuntos es igual a la unión de las dos diferencias.

