Números menor y mayor de intervalos y semirrectas

Encontrar el número menor o el número mayor de un intervalo o de una semirrecta parece un problema sencillo y de poca utilidad. Sin embargo, no es tan sencillo (porque hay algún caso que esconde una complicación) y es de mucha utilidad, como veremos de ahora en adelante en este curso.

Enunciados

Averigua cuál es el número menor y el número mayor de cada uno de los siguientes conjuntos:

① [2,5]

② (←,4)

Resoluciones

① Empezamos con el caso más sencillo de todos.

El menor de los números del intervalo cerrado [2,5] es el 2, porque $2 \in [2,5]$ y cualquier número menor que 2 ya no pertenece.

El mayor de los números del intervalo cerrado [2,5] es el 5, porque $5 \in [2,5]$ y cualquier número mayor que 5 ya no pertenece.

Solución: el menor número es el 2 y el mayor número es el 5.

② En este caso nos enfrentamos a dos dificultades diferentes.

No hay ningún número de la semirrecta que sea el menor de la semirrecta, porque, para cualquier número $x \in (\leftarrow,4)$, siempre se puede encontrar otro número de la semirrecta que sea menor; por ejemplo, $x-1$.

No hay ningún número de la semirrecta que sea el mayor de la semirrecta, ya que cada vez que pensemos en un número $y \in (\leftarrow,4)$, por muy próximo que esté a 4, siempre podemos encontrar un número mayor que y que siga perteneciendo a la semirrecta; por ejemplo, $(y+4):2$ (recuerda que entre dos números reales hay infinitos números reales). La idea de que el mayor número de la semirrecta es el $3,\overline{9}$ es falsa, porque hay que recordar que $3,\overline{9}=4$ y por tanto no pertenece a la semirrecta.

Solución: no existe un menor número y no existe un mayor número.

Una diferencia entre extremo abierto y cerrado

Comparando los dos ejemplos anteriores se observa una diferencia muy importante entre un extremo abierto (incluyendo las posibilidades ∞ y $-\infty$) y un extremo cerrado: si el extremo está abierto, siempre podremos seguir indefinidamente aproximándonos a él permaneciendo en el conjunto, pero si el extremo está cerrado, llegaremos «al final».

Estudio de otros casos

Cualquier otro conjunto que nos pueda aparecer se podrá estudiar casi exactamente igual que con los dos ejemplos que acabamos de estudiar, con muy pequeñas variaciones en el razonamiento.

