Simplificación y amplificación de exponente e índice

Si a es un número real no negativo, n y p son números naturales y m es un número entero, se verifica:

$$\boxed{\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}}$$

Demostración

Por definición de raíz, hay que demostrar que $\sqrt[n]{a^m}$ elevado a np da a^{mp}:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^p = \left(a^m\right)^p = a^{mp}$$

Modos de uso

* Si utilizamos la igualdad de izquierda a derecha, estamos **simplificando** el exponente y el índice.
  - Ejemplo 1: $\sqrt[6]{a^8}=\sqrt[3]{a^4}$. Ya que 6=2·3 y 8=2·4, hemos simplificado el 2.
  - Ejemplo 2: $\sqrt[10]{a^{15}}=\sqrt{a^3}$. Ya que 10=2·5 y 15=3·5, hemos simplificado el 5.
  - Ejemplo 3: $\sqrt[12]{a^4}=\sqrt[3]{a}$. Ya que 12=3·4 y 4=1·4, hemos simplificado el 4.
  - Ejemplo 4: $\sqrt[9]{a^{18}}=a^2$. Ya que 9=9·1 y 18=9·2, hemos simplificado el 9. Observa que ha desaparecido la raíz porque queda índice 1.
* Si utilizamos la igualdad de derecha a izquierda, estamos **amplificando** el exponente y el índice.
  - Ejemplo 5: $\sqrt[5]{a^3}=\sqrt[10]{a^6}$. Hemos multiplicado por 2 el exponente y el índice.
  - Ejemplo 6: $\sqrt{a^7}=\sqrt[6]{a^{21}}$. Hemos multiplicado por 3 el exponente y el índice.
  - Ejemplo 7: $\sqrt[7]{a}=\sqrt[35]{a^5}$. Hemos multiplicado por 5 el exponente y el índice.
  - Ejemplo 8: $a^3=\sqrt[7]{a^{21}}$. Hemos multiplicado por 7 el exponente y el índice. Observa que usamos que $a^3=\sqrt[1]{a^3}$

Utilidad de la simplificación

El método de simplificación de exponente e índice se usa para poder manejar expresiones más sencillas. Si la cantidad subradical es un número, se puede descomponer en factores primos para ver si es posible la simplificación.

* Ejemplo 9: $\sqrt[10]{64}=\sqrt[10]{2^6}$ =(simplificando entre 2)= $\sqrt[5]{2^3}=\sqrt[5]{8}$
* Ejemplo 10: $\sqrt[6]{81}=\sqrt[6]{3^4}$ =(simplificando entre 2)= $\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}$
* Ejemplo 11: $\sqrt[6]{512}=\sqrt[6]{2^9}$ =(simplificando entre 3)= $\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$

Utilidad de la amplificación

El método de amplificación de exponente e índice se puede utilizar, entre otras cosas, para comparar dos raíces sin calcularlas.

* Ejemplo 12: Compara $\sqrt{41}$ y $\sqrt[3]{274}$ sin calcularlas.

  Resolución: como mcm(2,3)=6, convertimos los dos radicales a índice 6:

  $\sqrt{41}=\sqrt[6]{41^3}=\sqrt[6]{68921}$; $\sqrt[3]{274}=\sqrt[6]{274^2}=\sqrt[6]{75076}$. $75076>68921\Rightarrow\sqrt[3]{274}>\sqrt{41}$

  Solución: $\sqrt[3]{274}>\sqrt{41}$

