Potencia de un radical

Si a es un número real no negativo y n y p son números naturales, se verifica:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}}$$

Demostración

Según la definición de raíz, para demostrar que la raíz enésima de a^p es $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, tenemos que elevar $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p$ a la potencia n y comprobar que obtenemos a^p. Lo podremos conseguir utilizando propiedades de las potencias de exponente natural.

$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^p\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{pn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^p = a^p$

Explicación

Una manera de ver esta propiedad es que los exponentes pueden estar tanto dentro como fuera del radical, según nos interese.

Ejemplos

Ejemplo 1. $\left(\sqrt[5]{2}\right)^4 = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

Ejemplo 2. $\left(\sqrt[7]{3}\right)^2 = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9}$

Ejemplo 3. $\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = \left(\sqrt[4]{3}\right)^3$

Ejemplo 4. $\sqrt[3]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^2$

Raíz de un radical

Si a es un número real no negativo y n y q son números naturales, se verifica:

$$\boxed{\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[qn]{a}}$$

Demostración

Según la definición de raíz, para demostrar que la raíz qn de a es $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}$, tenemos que elevar $\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}$ a la potencia qn y comprobar que obtenemos a. Lo podremos conseguir utilizando dos veces la propia definición de raíz y una propiedad de las potencias de exponente natural.

$\left(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}\right)^{qn} = \left(\left(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a}}\right)^q\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Ejemplos

Ejemplo 5. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[15]{2}$

Ejemplo 6. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$

Ejemplo 7. $\sqrt[35]{3} = \sqrt[7]{\sqrt[5]{3}}$

Ejemplo 8. $\sqrt[35]{3} = \sqrt[5]{\sqrt[7]{3}}$

Utilización combinada

Normalmente hace falta aplicar varias propiedades de los radicales hasta llegar a una expresión que nos satisfaga.

Ejemplo 9. $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[2]{2^3}} = \sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[8]{2^3} = \sqrt[8]{2\cdot 2^3} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$

(Hemos usado raíz de un radical, producto de radicales y simplificación)

