PROGRAMA

0. Teoria de conjuntos

I. Limites de sucesiones

II. Limites de funciones

III. Las funciones exponencial y logaritmica

IV. Trigonometria

V. Cálculo diferencial

0. Teoria de conjuntos

1. Conjuntos
2. Funciones

I. Limites de sucesiones

1. Sucesiones
2. Operaciones con sucesiones
3. Definiciones de limite
4. Operaciones con limites
5. Cálculo de limites
6. El número e

II. Limites de funciones

1. Estudio de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$
2. Definiciones de limite
3. Operaciones con limites
4. Cálculo de limites
5. Continuidad de funciones

III. Las funciones exponencial y logaritmica

1. La función exponencial
2. Ecuaciones exponenciales
3. La función logaritmica
4. Propiedades de los logaritmos
5. Ecuaciones logaritmicas

IV. Trigonometria

1. Ángulos
2. Razones trigonométricas
3. Identidades trigonométricas
4. Resolución de triángulos rectángulos

V. Cálculo diferencial

1. Derivada
2. Cálculo de derivadas
3. Crecimiento y convexidad de funciones
4. Aplicación de las derivadas

Teoría de conjuntos

1. Conjuntos

Diccionario de símbolos

$\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\emptyset$, $\forall$, $\exists$, $\exists!$, $:$, $|$, $\wedge$,

$\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ∞

Definiciones sobre conjuntos

Conjunto es la consideración en un todo de distintos entes

Los entes pueden, en principio, tener cualquier naturaleza

Los conj. se nombran con letras mayúsculas de cualquier alfabeto

Los entes que constituyen un conjunto se llaman elementos de ese conjunto

Se nombran con letras minúsculas de cualquier alfabeto.

Si el ente "a" pertenece al conjunto "A" se escribe $a \in A$

———— no ———————————— $a \notin A$

Un conjunto se puede definir de dos formas:

- Por extensión, nombrando todos sus elementos. El conjunto entonces se escribe poniendo entre llaves sus elementos: $A = \{ \dots \}$
- Por comprensión, diciendo la característica que sólo es cumplida por sus elementos. El conj. se escribe así: $A = \{ x \mid \text{condición} \}$

Para que un conjunto esté bien definido debe poderse decidir si cualquier ente pertenece a él o no

Cardinal de un conjunto es el número de elementos que tiene.

Se escribe $card(A)$ ó $\#(A)$. Ejemplo: $card(\emptyset) = 0$

Subconjuntos

Dados dos conjuntos A y M se dice que A es una parte de M, o que A es un subconjunto de M o que M es un subconjunto de A cuando todos los elementos de A pertenecen a M. Se escribe $A \subset M$ (A contenido en M). Es decir: $A \subset M \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in M$

Operaciones con conjuntos

Sean A y B dos conjuntos

Unión de A y B es el conjunto de elementos que están en A o en B

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

Intersección

Diferencia

Conjuntos numéricos

Son aquellos que sólo tienen números como elementos

Los más importantes son

Conjunto de números naturales $\mathbb{N}$

enteros $\mathbb{Z}$

racionales $\mathbb{Q}$

reales $\mathbb{R}$

[Representación gráfica]

Intervalos

Sean $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$[a,b)$

$(a,b]$

$[a,\infty) = [a, \rightarrow)$

(a,∞)

$(-\infty, b]$

$(-\infty, b)$

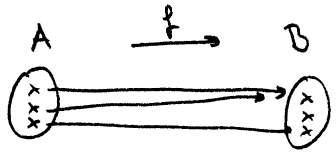
2. Funciones

(E) Una vez que hemos definido los conjuntos hay que estudiar sus relaciones. Esto se hace por medio de funciones.

Def. correspondencia

Sean A y B dos conjuntos

Una correspondencia entre A y B es cualquier manera de relacionar a elementos de A elementos de B. Se puede nombrar con cualquier símbolo.



Escribiremos $f : A \to B$ (se lee "f de A en B")

A es el conjunto de salida o partida de la correspondencia

B llegada

Si f relaciona $x \in A$ con $y, z, t \ldots \in B$ $(x \xrightarrow{f} y, z, t \ldots)$ decimos que $\{y, z, t \ldots\}$ es la imagen de x mediante f y se escribe $f(x) = \{y, z, t, \ldots\}$. Si $f(x)$ sólo tiene un elemento, p. ej. y, basta escribir $f(x) = y$

Def. de función o aplicación

Es cualquier correspondencia entre dos conjuntos tal que todos los elementos del conjunto de salida tienen imagen y sólamente una, es decir

$\forall x \in A \; \exists! \, y \in B \mid f(x) = y$

y es la imagen de x mediante f

$$A \qquad B$$
$$x \longrightarrow y$$

Definición clásica de función

Muchas veces para obtener el valor de "y" basta con hacer unas operaciones con la x, p. e: $y = 5x - 2$

Por eso se suele decir que función es "la relación de dependencia entre dos variables".

x es la variable independiente (pertenece al conj. de partida)
y " " " dependiente (" " " " llegada)

Ejemplos

a) Usar variables mudas
b) Dado $f(x)$, hallar $f(x+1)$, $f(2x)$, etc...

Suma y producto de funciones

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones

1. La función suma de f y g se escribe $f+g$ y se define así:

$$f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) + g(x)$$
, es decir: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

La diferencia se considera como particular de la suma.

2. Producto

Composición de funciones

Sean A, B, C conj. y $f: A \to B$, $g: B \to C$ funciones.

La función composición de f y g se escribe $g \circ f$ y se define así:

$$g \circ f : A \to C$$
$$x \to g(f(x))$$
, es decir: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Función inversa

Supongamos que $f: A \to B$ es una función que verifica que todos los elementos de B son imágenes de uno sólo de A (se llama función biyectiva)

Entonces se puede definir la función inversa de f, que se escribe f^{-1}:

$$\begin{aligned} f^{-1}: B &\to A \\ y &\to x \end{aligned}$$ donde x es el único elemento de A tal que $f(x)=y$

Ejemplo

1. $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to 3x \end{aligned} \to y = 3x \to x = \frac{y}{3} \to \begin{aligned} f^{-1}: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\to \frac{y}{3} \end{aligned}$

etc...

Cuando se calcula la función inversa se invierten los papeles de la variable dependiente e independiente.

TC – P1

<u>Interesante</u>

1) Hallar $f \circ f$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} 0 & x \in (-1,1) \\ \frac{x}{2} & x \notin (-1,1) \end{cases}$$

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longrightarrow \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ 2n & n \text{ impar} \end{cases}$$

2) Hallar $f \cdot g$, $f + g$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} 6 & x \in (-2,2) \\ 0 & x \notin (-2,2) \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} 1 & x \in (-1,1) \\ 0 & \notin \end{cases}$$

3) $f \mid (f \circ f)(x) = 3x^4$

4) card $\{ f : A \to B \}$

5) $f \mid f + f = f \cdot f$ $(f \neq cte)$

6) Estudiar biyectividades

Matemáticas Segundo de B.U.P. Grupo A

Parte A: Conjuntos. ***Examen de recuperación.*** **Fecha: M.29.10.1991**

1. Definición de unión de conjuntos.

2. Definición de composición de funciones.

3. Escribe de la manera más sencilla los siguientes conjuntos:

   a) $[3, 6) \cap [5, 9)$
   b) $(-3, 0) \cup [0, 1)$
   c) $(-2, 2] - (1, 5]$
   d) $[-1, 1] - \mathbf{N}$

4. Siendo $f, g, h: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definidas por

   $f(x) = 4x + 2$, $g(y) = 3y^2 + 2$, $h(z) = 1 - 4z$, hallar

   a) $f + g - h$
   b) fg
   c) f^{-1}
   d) $g \circ h$
   e) $h \circ f$

<u>Valor de las preguntas:</u>

1, 2: *Un punto y medio*
3: *Dos puntos (medio cada apartado)*
4: *Cinco puntos (uno cada apartado)*

$\boxed{\text{Subir nota}}$

1. Buscar $A, B \subset \mathbb{R} \mid A \cup B = [0,8] \wedge A \cap B = [4,5)$. ¿Cuántas soluciones?

2. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Escribe $f \circ f$

   $n \to \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n & \text{" " " impar} \end{cases}$

3. Siendo $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \frac{x-1}{3}$, $g(x) = \frac{3-x}{6}$. Hallar $f^{-1} + g^{-1}$

Matemáticas **Segundo de B.U.P.** **Grupo C**

Parte A: Conjuntos. ***Examen de recuperación.*** **Fecha: M.20.10.1991**

1. Definición de intersección de conjuntos.

2. Definición de composición de funciones.

3. Escribe de la manera más sencilla los siguientes conjuntos:

   a) $[2, 5) \cap [4, 9)$
   b) $(-4, 0) \cup [0, 2)$
   c) $(-3, 2] - (1, 6]$
   d) $[-1, 1] - \mathbf{N}$

4. Siendo $f, g, h: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definidas por

   $f(x) = 2x + 1$, $g(y) = 2y^2 + 3$, $h(z) = 5 - 3z$, hallar

   a) $f + g - h$
   b) fg
   c) f^{-1}
   d) $g \circ h$
   e) $h \circ f$

Valor de las preguntas:

1, 2: *Un punto y medio*
3: *Dos puntos (medio cada apartado)*
4: *Cinco puntos (uno cada apartado)*

$\boxed{\text{Subir nota}}$

1. $A = \{*, \square\}$, $B = \{a, b, c\}$. $\operatorname{card}(\{f: A \to B \mid f \text{ es aplicación}\})$

   ¿Cuántas son biyectivas?

2. Define $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ a) $(f \circ f)(x) = x^4$; b) $(f \circ f)(x) = 8x^4$; c) $(f \circ f)(x) = 2x^4$

3. Siendo $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \dfrac{5-2x}{3}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{2}$, hallar $f^{-1} \circ g \circ f^{-1}$

Límite de sucesiones

1. Sucesiones

E Generalización del concepto de progresión. Idea de "tira" de cosas.

Definición

Dado un conjunto V se dice que "a" es una sucesión de elementos de V cuando $a : \mathbb{N} \to V$ es una aplicación.

Si V es un conj. numérico se dice que a es una suc. numérica

Notación

Sea $a : \mathbb{N} \to V$ una sucesión

$a(1) = a_1$ se llama primer elemento de la sucesión

$\vdots$

$a(n) = a_n$ " " enésimo " " " "

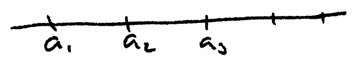
La sucesión también se puede llamar $\{a_n\}$ y se dice que a_n es el término general de la sucesión a

Problema práctico

A veces se da una sucesión diciendo sus primeros elementos y es necesario encontrar el término general.

Representación gráfica de una sucesión

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de n. reales



Definiciones de crecimiento

Sea $\{a_n\}$ una s.n.r.

1. Se dice que $\{a_n\}$ es creciente cuando todo término es menor que el siguiente, e.d. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

2. Decreciente.

Definiciones de acotación

Sea $\{a_n\}$ una s.n.r.

1. Se dice que el número real K es cota superior de una sucesión cuando es mayor o igual que todos los elementos de esa sucesión

$$K \in \mathbb{R} \text{ cota sup. de } \{a_n\} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : K \geq a_n$$

2. Cota inferior

3. Una suc. está acotada sup. cuando tiene alguna cota sup.

$$\{a_n\} \text{ ac. sup.} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : K \geq a_n$$

4. Ac. inf.

5. Una suc. está acotada cuando está ac. sup. e inf.

$$\{a_n\} \text{ acotada} \Leftrightarrow \exists K_1, K_2 \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : K_1 \leq a_n \leq K_2$$

2. Operaciones con sucesiones

Igualdad

Se dice que dos sucesiones son iguales cuando todos sus elementos correspondientes son iguales, e. d.: $\{a_n\} = \{b_n\} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n = b_n$

Operaciones

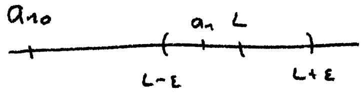
Las sucesiones ~~se~~ pueden sumar, restar y multiplicar sin ninguna restricción. Las operaciones se realizan término a término y el término general se obtiene haciendo la misma operación.

Cociente

Para utilizar una sucesión como denominador hay que asegurarse de que ninguno de sus términos es cero.

Si existe, la sucesión $\frac{1}{a_n}$ se llama inversa de a_n

3. Definiciones de límite



(E) Proximidad cada vez mayor

Calcular $a_n = \dfrac{n+K}{n}$ para n alto. Ver que $\to 1$

Definición de límite finito

Sea $\{a_n\}$ una s.n.r. y $L \in \mathbb{R}$.

Se dice que el límite de $\{a_n\}$ es L cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

Se escribe $\lim a_n = L$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$; $a_n \to L$; $a_n \xrightarrow{n\to\infty} L$

Ejemplos [SUPRIMIBLE, se puede hacer intuitivamente]

1. $\lim \dfrac{1}{n} = 0$

Hay que dem. que $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 : \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Elegimos un $\varepsilon > 0$ y vamos a encontrar el n_0

$\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \iff -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$. ; $-\varepsilon < \frac{1}{n}$ siempre es cierto,

luego lo que hay que buscar que se cumple es $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Esto es

cierto cuando $\frac{1}{\varepsilon} < n$, así que basta elegir un n_0 que sea $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

(hay infinitos para elegir). Entonces

$$\left.\begin{array}{l} n > n_0 \\ n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right\} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ como queríamos}$$

Por tanto, si elegimos para $\varepsilon > 0$ un $n_0 \in \mathbb{N} \mid n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, será cierto que

$\forall n > n_0 : \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, c.q.d.

LSS

2. $\forall c \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} c = c$

[E.d.: la sucesión $a_n = c$ tiene por límite c]

Hay que demostrar que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : c \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,
pero como esto es cierto siempre, se puede tomar cualquier n_0

Ejercicios

Dado a_n, intentar calcular $\lim a_n$ con calculadora.

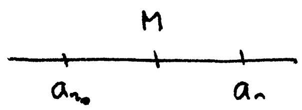
Definiciones de convergencia

1. Una suc. es convergente cuando tiene algún límite finito
2. " " " divergente " no tiene límite finito

Proposiciones [SUPRIMIBLE]

1. Si una sucesión es convergente, el límite es único
2. Toda sucesión convergente está acotada
3. Toda sucesión creciente y ac. sup. es conv.
4. " " decreciente " " inf. " "

Definiciones de límite infinito

(E) 

; $n^2 \to \infty$ (tomando valores ; $M \to n_0$)

Sea $\{a_n\}$ una s.n.r.

1. Se dice que la sucesión a_n tiene por límite infinito cuando

   $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : a_n > M$

   Se escribe $\lim a_n = \infty$ .... y se dice que a_n "diverge a infinito"

2. Menos infinito

Ejemplos [SUPRIMIBLE, o darlo intuitivamente]

1. $\lim n = \infty$

[Tomando $n_0 > M$]

2. $\lim (-n) = -\infty$

[Tomando $n_0 > -M$]

Resumen

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim c = c$$

$$\lim n = \infty$$

$$\lim (-n) = -\infty$$

4. Operaciones con límites

Casos generales

Sean a_n y b_n dos sucesiones

1. $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

   $\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$

2. $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$
3. $\lim (a_n / b_n) = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$
4. $\lim (a_n^{b_n}) = (\lim a_n)^{\lim b_n}$

Ejemplos

Casos particulares

Las siguientes expresiones son simbólicas y para productos y cocientes hay que tener en cuenta la regla de los signos

1a. $a + \infty = \infty$

1b. $a - \infty = -\infty$

1c. $\infty + \infty = \infty$

1d. $-\infty - \infty = -\infty$

2a. $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot \infty = \infty$

2b. $\infty \cdot \infty = \infty$

3a. $\dfrac{a}{\infty} = 0$

3b. $\dfrac{\infty}{a} = \infty$

3c. $\dfrac{a}{0} = \infty$

4a. $\infty^{\infty} = \infty$

4b. $\infty^{-\infty} = 0$

4c. $0^{\infty} = 0$

4d. $0^{-\infty} = \infty$

4e. $\infty^{b} = \begin{cases} \infty & b>0 \\ 0 & b<0 \end{cases}$

4f. $a^{\infty} = \begin{cases} \infty & a>1 \\ 0 & 0<a<1 \end{cases}$

4g. $a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & a>1 \\ \infty & 0<a<1 \end{cases}$

Ejemplos

Indeterminaciones

Las siguientes expresiones son "indeterminadas", es decir, no se puede afirmar a priori el carácter (convergencia o no) de la sucesión resultante, sino que hay que conocer las sucesiones que la forman.

1. $\infty - \infty$

2. $0 \cdot \infty$

3a. $\frac{\infty}{\infty}$

3b. $\frac{0}{0}$

4a. 1^{∞}

4b. ∞^{0}

4c. 0^{0}

5. Cálculo de límites

De sucesiones polinómicas

Sucesión polinómica es la que tiene como término general un polinomio, como $a_n = 2n^6 - 3n^3 + 4n - 8$

Sus límites son ∞ ó $-\infty$, pero casi siempre aparecen como una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para resolverla basta sacar factor común la mayor potencia de n.

De sucesiones cociente de polinomios

Si $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios de variable n, queremos calcular $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$, como por ejemplo [los tres tipos]

Algunos se pueden resolver directamente, pero lo más usual es que sean indeterminados del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

La indeterminación se resuelve sacando factor común en el numerador y el denominador independientemente.

[Proponer que descubran una regla general]

6. El número e

Ejercicio

Adivinar $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Proposición

La sucesión $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es convergente

Demostración

[Según tiempo]

Definición

$$e = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Es irracional. Su desarrollo decimal comienza: 2.71828182845

Proposición

$$\lim a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Ejemplos de utilización

LS-P

Interesantes

Fibonacci

Método de diferencias sucesivas

¿ $\exists \{a_n\}$ s.n.r. | .... ?

Siendo $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sucesión, hallar q para que a sea convergente

LS-P

Cálculo efectivo

$$\lim \frac{\sqrt{}}{\sim\sim\sim} \qquad \lim \frac{\sqrt{} + \sqrt{}}{\sqrt{} + \sqrt{}}$$

$$\lim \left(\sqrt{} - \sim\sim \right) \qquad \lim \left(\sqrt{} - \sqrt{} \right)$$

Algunas diferencias salen sacando factor común

$$\lim \left(\frac{n^2+n+1}{n+1} - n + 1 \right)$$

$$\lim \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{n}{1-n} + 1}{\frac{n}{n^2-1}}$$

$$\lim \frac{\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}}{\frac{n}{3n+4} - \frac{1}{3}}$$

LS - P1

Hallar término general

Preparatorios:

4	8	12	16	$4n$
4	5	6	7	$n+3$
4	4	4	4	4
4	2	0	-2	$-2n+6$

Primera tanda:

1	4	9	16	n^2
0	3	8	15	n^2-1
1	4	7	10	$3n-2$
4	3	2	1	$-n+5$
2	$\frac{4}{2}$	2	$\frac{8}{4}$	2
2	4	8	16	2^n

Segunda tanda:

4	9	16	25	$(n+1)^2$
3	9	27	81	3^n
4	10	28	82	3^n+1
4	11	30	85	3^n+n
7	15	23	31	$8n-1$
-2	5	12	19	$7n-9$
-1	1	-1	1	$(-1)^n$

LS - P2

Tercera tanda:

3	7	11	15	$4n-1$
-3	7	-11	15	$(-1)^n(4n-1)$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{n}{2}$
25	36	49	64	$(n+4)^2$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	4^{n-3}
16	8	4	2	2^{5-n}

Cuarta tanda:

1	(-1)	1	-1	$(-1)^{n+1}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{2n+1}{3n+1}$
$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2n-5}{2n+2}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{2^{n-1}}{n+4}$
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{n^2}{2}$

LS - P3

Quinta tenda

$\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[4]{4}$		$\sqrt[n+1]{n+1}$
1	-4	9	-16	$(-1)^{n} n^{2}$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{-n+4}{2n+1}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{3^{n-1}-1}{2n-1}$
1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{27}{4}$	$\frac{3^{n-1}}{n}$
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{n-1}{n+3}$

Matemáticas Segundo de B.U.P., grupo A Curso 1991-92

Examen de recuperación de la parte B: Límite de sucesiones. ***Fecha: X.19.2.1992***

1. Definición de cota superior de una sucesión.

2. Definición de límite finito de una sucesión.

3. Siendo $a_n = \dfrac{n^3+65}{n^2+5n}$, calcular con 4 decimales a_4, y a_{143}

4. Representa gráficamente los 5 primeros elementos de la sucesión $b_n = 3n-5$. Estudia su crecimiento y acotación.

5. Siendo $c_n = 7n-56$, $d_n = 3n+2$, $e_n = 8n-9$, calcula

   a) $\dfrac{3c_n+2d_n}{e_n}$ b) $\dfrac{d_n e_n}{c_n}$

6. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\ (5+n^2)(-n^3+5n)$ b) $\lim\ (3n^2+4n^6-3n+24)$ c) $\lim \dfrac{9n^3+1}{n+3n^3}$

   d) $\lim\ \left(\frac{7}{5}+\frac{2}{n}\right)^{4n+1}$ e) $\lim\ \left(1+\frac{5}{4n+3}\right)^n$ f) $\lim\ (6n^{-3}+3)$

<u>Valor de las preguntas:</u> 1: *medio punto*; 2, 3 y 5: *un punto*
4: *un punto y medio*; 6: *cinco puntos*

Matemáticas Segundo de B.U.P., grupo A Curso 1991-92

Examen de subir nota de la parte B: Límite de sucesiones. ***Fecha: X.19.2.1992***

1. ¿Crees que hay alguna sucesión acotada con límite infinito? Justifica tu respuesta.
2. ¿Crees que hay alguna sucesión con límite 5 y los 100 primeros términos negativos? Justifica tu respuesta.
3. ¿Crees que hay alguna sucesión con límite -3 y cota superior -5? Justifica tu respuesta.
4. Calcula los siguientes límites sin usar la calculadora:

   a) $\lim \dfrac{5^{n+3}}{5^n}$ b) $\lim \dfrac{5^n}{3^{n+1}}$ c) $\lim \dfrac{(1/5)^{n+2}}{(1/3)^n}$

5. Una sucesión se puede definir *recursivamente* cuando para conocer un elemento hay que conocer alguno o alguno de los anteriores. Este es un ejemplo:

   $a_1 = 2.44 \times 10^{34}$ (el primer elemento es conocido, y se da en notación científica)

   $a_n = \text{raiz}(a_{n-1})$ para $n>1$ (a partir del segundo elemento, cada elemento se calcula como la raiz cuadrada del anterior).

   Escribe los 20 primeros elementos de esta sucesión.
   ¿Te parece que existe el $\lim a_n$?

Matemáticas Segundo de B.U.P., grupo C Curso 1991-92

Examen de recuperación de la parte B: Límite de sucesiones. ***Fecha: X.22.1.1992***

1. Definición de cota inferior de una sucesión.
2. Definición de límite finito de una sucesión.
3. Siendo $a_n = \dfrac{n^3+85}{n^2+2n}$, calcular con 4 decimales a_3, y a_{135}
4. Representa gráficamente los 5 primeros elementos de la sucesión $b_n = 2n+3$. Estudia su crecimiento y acotación.
5. Siendo $c_n = 8n-32$, $d_n = 2n+1$, $e_n = 7n-6$, calcula

   a) $\dfrac{3c_n+2d_n}{e_n}$ b) $\dfrac{d_n e_n}{c_n}$

6. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\ (3+n^2)(-n^3+n)$ b) $\lim\ (2n^2+3n^6-7n+11)$ c) $\lim \dfrac{8n^3+3}{n+2n^3}$

   d) $\lim\ \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{n}\right)^{6n+3}$ e) $\lim\ \left(1+\frac{4}{3n+5}\right)^n$ f) $\lim\ (3n^{-2}+5)$

Valor de las preguntas: 1: *medio punto*; 2, 3 y 5: *un punto*
4: *un punto y medio*; 6: *cinco puntos*

Matemáticas Segundo de B.U.P., grupo C Curso 1991-92

Examen de subir nota de la parte B: Límite de sucesiones. ***Fecha: X.22.1.1992***

1. ¿Crees que hay alguna sucesión acotada con límite menos infinito? Justifica tu respuesta.
2. ¿Crees que hay alguna sucesión con límite -1 y los 100 primeros términos positivos? Justifica tu respuesta.
3. ¿Crees que hay alguna sucesión con límite -3 y cota inferior 2? Justifica tu respuesta.
4. Calcula los siguientes límites sin usar la calculadora:

   a) $\lim \dfrac{2^{n+1}}{2^n}$ b) $\lim \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$ c) $\lim \dfrac{(1/3)^{n+1}}{(1/2)^n}$

5. La sucesión de *Fibonacci* se define de la siguiente manera:
   $a_1 = a_2 = 1$ (los dos primeros elementos son 1);

   $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n>2$ (a partir del tercer elemento, cada elemento se calcula sumando los dos anteriores).
   Escribe los 20 primeros elementos de la sucesión de *Fibonacci*.
   Calcula el cociente a_{n+1}/a_n para los valores de n 10, 15, 18 y 19, dando los resultados con 4 decimales. ¿Te parece que existe el lim (a_{n+1}/a_n)?

Matemáticas **Segundo de B.U.P.** **Curso 1991-92**

Hoja de problemas. ***Parte B : Límite de sucesiones.*** **Fecha: M.10.12.1991**

Calcula los siguientes límites. Antes debes intentar razonar cuál puede ser el límite, y luego demostrarlo. Recuerda que muchos pueden salir directamente por teoría de límites, aunque algunos pueden ser indeterminados. Éstos debes intentar calcularlos usando tu ingenio o inspirándote en los métodos explicados. Cuando todo falle, puedes intentar calcularlos con la calculadora o el ordenador; en este caso, da los resultados con cuatro decimales.

1. $\lim \left(\frac{2^n-1}{5+\frac{1}{n}}\right)\left(2-n^2\right)$	2. $\lim \left(3-5n+4n^7-5n^4\right)$	3. $\lim \frac{6-2n^2+5n}{7n^2+3n-1}$
4. $\lim \frac{n+\sqrt{n}}{2-\frac{5}{n}}$	5. $\lim \frac{6n^3+4n^2}{2-3n}$	6. $\lim \left(3-\frac{4}{n^2}\right)^{\frac{2}{n}+\frac{1}{2}}$
7. $\lim \left(-3n^3+5+8n\right)$	8. $\lim \left(\sqrt{2-\frac{1}{n}}-\sqrt{n-\frac{1}{2}}\right)$	9. $\lim \left(\frac{5+n^2}{3+n}+\frac{5}{4}\right)$
10. $\lim \left(1+\frac{3}{2n}\right)^{5n}$	11. $\lim \sqrt[n]{n}$	12. $\lim \left(1-\frac{2}{5n^2}\right)^{-n^2}$
13. $\lim \left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}\right)$	14. $\lim \left(1+\frac{2n}{1+n^2}\right)^{5n}$	15. $\lim \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}\right)$
16. $\lim \frac{\sqrt{64n+10}}{\sqrt{4n+1}}$	17. $\lim \left(\sqrt{n+8}-\sqrt{n+1}\right)$	18. $\lim \frac{\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}}{\frac{n}{3n+1}-\frac{1}{3}}$
19. $\lim \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{3n}$	20. $\lim \left(\frac{n^2+n+1}{n+1}-n+1\right)$	21. $\lim \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$
22. $\lim \left(\sqrt[3]{n+5}-\sqrt[3]{n+1}\right)$	23. $\lim \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n+1}$	24. $\lim \frac{\frac{1}{n+1}+\frac{n}{1-n}+1}{\frac{n}{n^2-1}}$

Límite de funciones

1. Estudio de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

Nombre de las funciones numéricas

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ función entera de variable natural.

etc...

Definición de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}(\mathbb{R})$ es el conjunto de funciones reales de variable real

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función} \}.$$

Definición de función identidad

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x \end{aligned}$$

[Ej. y ej.]

Def. funciones constantes $\forall x \in \mathbb{R}, \ K(x) = K$

Proposición

1. $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : \quad f \circ I = I \circ f = f$
2. $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \wedge \exists f^{-1} \Rightarrow f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

Dominio de una función

A veces se consideran funciones que realmente no lo son, porque no es posible calcular la imagen de todos los elementos de $\mathbb{R}$, como por ejemplo (...)

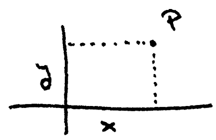
Por ello definimos el dominio de una función como el conj. de números reales de los que podemos calcular su imagen

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \Rightarrow D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) \}$$

Producto cartesiano

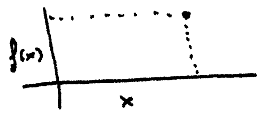
Sean A y B dos conjuntos; se define $A \times B = \{ \overset{\text{par}}{\overset{\downarrow}{(a,b)}} \mid a \in A \wedge b \in B \}$

Coordenadas cartesianas



Coordenadas cartesianas de P : $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Representación gráfica de una función



$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

. Grafo o gráfica de f es

$$G(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \}$$

Ejemplos

a) Rectas

b) Parábolas

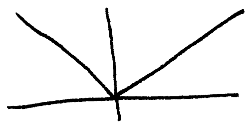
c) x^n

d) Definidas a trozos

e) f y f^{-1}

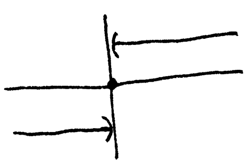
Función valor absoluto

$$\begin{aligned} |\,| : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Función signo

$$\begin{aligned} sg : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$



2. Definiciones de límite

Ejemplo

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \begin{cases} 2x & x<2 \\ 0 & x=2 \\ 8-2x & x>2 \end{cases}$$

Ver numéricamente que $x \to 2 \Rightarrow f(x) \to 4$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \begin{cases} 2x & x<2 \\ 0 & x=2 \\ 3 & x>2 \end{cases}$$

$x \to 2^- \Rightarrow g(x) \to 4$

$x \to 2^+ \Rightarrow g(x) \to 3$

Límite finito de una función en un punto

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $L, x_0 \in \mathbb{R}$.

Se dice que el límite de f cuando x tiende a x_0 es L cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

Se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} L$

Ej. y ej.

b) 11 y 5j.

a) Funciones definidas a trozos

Límites infinitos de una función en un punto

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > M$

b) $\quad -\infty \qquad\qquad <$

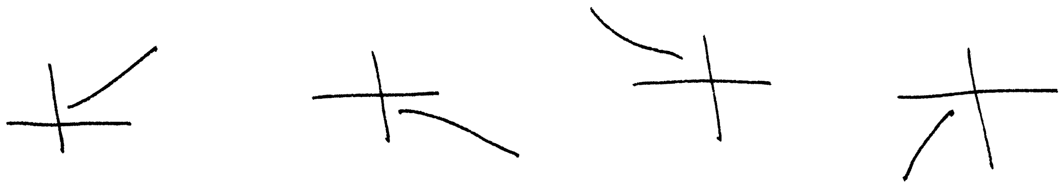
Límites finitos de una función cuando $x \to \pm\infty$

a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{R} \mid x > n \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$<$

b) $-\infty$

Límites infinitos de una función cuando $x \to \pm\infty$



Límites laterales

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $L, x_0 \in \mathbb{R}$

a) Se dice que el límite de f cuando x tiende a x_0 por la derecha es L cuando

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Se escribe $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$, $f(x) \xrightarrow{x \to x_0^+} L$

b) izquierda

c) También se pueden definir límites infinitos en un punto por los dos lados.

Ejemplos

a) $Sg(x)$

b) Funciones definidas a trozos

Proposición

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$

3. Operaciones con límites

Cuando se calcula el límite de una función cuando $x \to x_0$, $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$, son aplicables todas las reglas del cálculo de límites de sucesiones.

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R} \mid \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \wedge \lim_{x \to x_0} g(x)$

Entonces $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$

Demostración

(...)

Proposición

1. $\lim_{x \to a} x = a$

2. $\lim_{x \to a} c = c$

4. Cálculo de límites

[Explicar con un ejemplo que hay que sustituir el valor de x_0 en f a ver si el límite sale, y que eso es válido]

Límites cuando $x \to \pm\infty$

Se tratan del mismo modo que los límites de sucesiones

Límites del tipo $\frac{0}{0}$ cuando $x \to x_0$

Se suelen resolver usando la regla de Ruffini

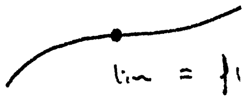
[Hacer la op. para saber a la vez el cociente y el resto]

Límites del tipo 1^∞ cuando $x \to x_0$

Se basan en la siguiente propiedad:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(1 + f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}} = e$$

5. Continuidad de funciones

(E) 

$\Longleftrightarrow$ No levantar tiza

Definiciones

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Se dice que f es continua en x_0 cuando

   a) $x_0 \in D(f)$

   b) Existe límite finito de f cuando $x \to x_0$

   c) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. Si f no es continua en x_0, diremos que es discontinua en x_0,

   o que x_0 es un punto de discontinuidad de f

3. Se dice que f es continua cuando es continua en x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

4. $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ es continua} \}$.

5. Se dice que f es discontinua cuando tiene algún punto de discont.

Observación

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es continua en x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

se puede intercambiar "f" y "lim"

Propiedades

1. $\forall K \in \mathbb{R}$: $f(x) = K$ es continua
2. $I \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$
3. $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \Rightarrow f+g,\ fg,\ g \circ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$
4. Si $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ los únicos puntos de discontinuidad de $\frac{f(x)}{g(x)}$ son aquellos en que $g(x) = 0$
5. Las funciones polinómicas son $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ son continuas.

Demostración

(...)

Teorema de Bolzano

Sean $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$ tales que $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo. Entonces $\exists\, c \in [a, b] \mid f(c) = 0$

Idea de la demostración

(...)

Tipos de discontinuidad [SUPRIMIBLE]

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de discontinuidad de f

Llamamos " salto de f en x_0 " a

$$S_{f,x_0} = \left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) \right|$$

Hay tres tipos de discontinuidad :

a) Discontinuidad evitable : $S_{f,x_0} = 0$

Puede ocurrir que $x_0 \notin D(f)$ o $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

b) Discontinuidad de primera especie $S_{f,x_0} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

c) " " segunda especie $S_{f,x_0} = \infty$

LF - P

Ruffini

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + 3x - 3}{x^2 + 3x - 4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 3x^3 + x - 3}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^4 + 4x^3 + x^2 - x - 6}{3x^3 + 6x^2 - 2x - 4}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{3x^2 + 8x - 3}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 3x^3 + 3x - 9}{x^3 - x^2 - 6x}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 10}{2x^3 - 7x^2 + 9x - 6}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^2 - 3x - 4}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2 - 4)(x^3 + 1)}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 5x + 6}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x^2 + 11x + 24}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{4x^3 - 5x^2 + 1}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^4 + 4x^3 + x^2 - x - 6}{3x^3 + 6x^2 - 2x - 4}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{-x^4 - 2x^3 + 2x + 4}{x^2 - x - 6}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x^3 + 4x - 4}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 8x - 10}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^3 - 4x^2 - 6x + 24}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^5 - 2x^4 + x - 2}{5x^2 - 9x - 2}$$

LF - P

Cálculo efectivo

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{8}{8-x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^4}-x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt[3]{125x^3+64}}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{3}{x-3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{16x+4}-\sqrt{x}}$$

Continuidad

$$\frac{1}{x^2+1} \qquad (ax+b)^n \qquad \mathrm{sg} \qquad \frac{1}{x^2-1} \qquad \frac{1}{x^2+a}$$

Segundo de B.U.P.   Hoja de ejercicios   M. 24.4.1990

Límites con logaritmos y continuidad.

$\boxed{*}$ Calcular los siguientes límites

(1) $\lim_{x \to 0^+} \left(\log(100x^2 + x) - \log(x + x^2) \right)$

(2) $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\log x}{x^2 - 1}$

(3) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \log x \right)$

(4) $\lim_{x \to 1} \frac{\log_2 x}{\log x}$

(5) $\lim_{x \to \infty} \left(\ln\left(x + \frac{1}{x}\right) - \ln x \right)$

(6) $\lim_{x \to \infty} \frac{\log \ln x}{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$\boxed{*}$ Estudiar si las siguientes funciones son continuas

(7) $f(x) = \frac{6x - 2}{x^3 + 2x^2 + 5x}$ (8) $g(x) = \frac{x^3}{x^8 + 10}$

(9) $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x - 1}$ (10) $p(x) = \frac{7x^3 + 14x^2}{1428}$

(11) $q(x) = (6x^6 + 5x + 1) \cdot (22x^2 + 15x - 8)$

(12) $a(x) = \frac{1}{x^8 + 3x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 4}$

(13) $b(x) = \frac{1}{x^8 + 3x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 4x}$

Patentes y potentes ejercicios neuronales.

Hoja de teoría   *Parte C : Límite de funciones.*   **Fecha: L.24.2.1992**

```
100 rem *-------------------------------------------------------------------
110 rem *                Programa "Bolzano",   Pedro Reina,   J.20.2.1992
120 rem *
130 rem * OBJETIVO:  Resolver cualquier ecuación de la forma f(x)=0,
140 rem *            siendo f una función real de variable real continua
150 rem * ENTRADAS:  Hay que escribir la función f, editando la línea en
160 rem *            la que se define
170 rem *            Se introducen también "a" y "b", que son los extremos
180 rem *            del intervalo en el que se comienza la búsqueda
190 rem * SALIDAS:   Puede salir un mensaje indicando que el método no puede
200 rem *            encontrar ninguna solución, porque f(a) y f(b) no sean
210 rem *            de distinto signo, o bien una solución de la ecuación
220 rem * TEOREMA:   El programa se basa en el Teorema de Bolzano:
230 rem *            Si f: R -> R es una función continua en el intervalo
240 rem *            [a,b] y f(a) y f(b) son de distinto signo entonces existe
250 rem *            algún número c del intervalo [a,b] que verifica f(c)=0
260 rem * ALGORITMO: Pedir al usuario los puntos a y b
270 rem *            Si f(a)=0 o f(b)=0, mostrar a o b, solución de la ecuación
280 rem *            Si f(a) y f(b) son del mismo signo, mostrar mensaje y fin
300 rem *            Asignar "a" y "b" a las variables FunPos y FunNeg
310 rem *                    según el signo de f(a) y f(b)
320 rem *            Repetir
330 rem *                Hallar c, punto medio del intervalo de extremos
340 rem *                          FunPos y FunNeg
350 rem *                Si f(c)=0, mostrar c, que es la solución
360 rem *                Si f(c)>0, asignar a FunPos el valor c
370 rem *                Si f(c)<0, asignar a FunNeg el valor c
380 rem *                Si FunPos y FunNeg  están suficientemente cerca,
390 rem *                          mostrar FunPos como solución
400 rem *-------------------------------------------------------------------
410 :
420 rem *-------------------------------------------------------------------
430 rem * FUNCION:  f
440 rem * OBJETIVO: Hallar el valor de la función f en el punto x
450 rem * ENTRADAS: La variable independiente x
460 rem * SALIDAS:  El valor de la función, f(x)
470 rem * NOTA: Esta definición hay que variarla con arreglo a la ecuación
480 rem *       que se desee resolver
490 rem *-------------------------------------------------------------------
500 def fnf(x)=x^2-2
510 :
520 rem *-------------------------------------------------------------------
530 rem * Programa principal
540 rem *-------------------------------------------------------------------
550 input "Introduce a: "; a
560 input "Introduce b: "; b
570 :
580 if fnf(a)=0 then Solucion=a : goto 730
590 if fnf(b)=0 then Solucion=b : goto 730
600 :
610 if fnf(a)*fnf(b)>0 then print "f(a) y f(b) son del mismo signo" : end
620 :
630 if fnf(a)>0 then FunPos=a else FunNeg=a
640 if fnf(b)>0 then FunPos=b else FunNeg=b
650 :
660 rem Comienza el bucle de aproximación
670   c=(FunPos+FunNeg)/2  :  Valor=fnf(c)
680   if Valor=0 then Solucion=c : goto 730
690   if Valor>0 then FunPos=c else FunNeg=c
700   if abs(FunPos-FunNeg)<1E-6 then Solucion=FunPos : goto 730
710 goto 670
720 :
730 rem *-------------------------------------------------------------------
740 rem * PROCEDIMIENTO: Solución
750 rem * OBJETIVO:  Imprimir la solución de la ecuación
760 rem * ENTRADAS:  La variable "Solucion"
770 rem * SALIDAS:   Se presenta en pantalla
780 rem * ALGORITMO: Imprimir la solución. Terminar el programa
790 rem *-------------------------------------------------------------------
800 print "Solución = "; Solucion
```

EX 1

Las funciones exponencial y logarítmica

1. La función exponencial

Definición

1. Función exponencial es aquella que

   a) Tiene forma de potencia

   b) La variable independiente sólo aparece en el exponente

   c) La base es un número positivo distinto de 1

2. Sea $a \in \mathbb{R} \mid a \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Queremos definir a^x

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow a^x = a \cdot a \cdot \overset{x}{\ldots\ldots} \cdot a$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a^x \text{ ya definido si } x \in \mathbb{N} \\ a^x = 1 \text{ si } x = 0 \\ x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow -x \in \mathbb{N}. \text{ Def: } a^x = \dfrac{1}{a^{-x}} \end{cases}$$

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{m}{n} \Rightarrow \text{Def: } a^x = \sqrt[n]{a^m}$$

$x \in \mathbb{R} \rightarrow$ de modo que $y = a^x$ sea continua (se puede hacer por lím.)

Función exponencial será cualquiera de la forma $y = a^{f(x)} \mid f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

Propiedades inmediatas

Sean $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
4. $a^{xy} = (a^x)^y$
5. $(ab)^x = a^x b^x$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Ex 2

Definición

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

1. f creciente $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} \mid x < y : f(x) < f(y)$

2. decreciente

Propiedades

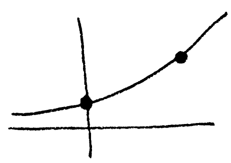
Sea $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$

1. $a^x > 0$
2. $a^0 = 1$
3. $a^1 = a$
4. $y = a^x$ continua.

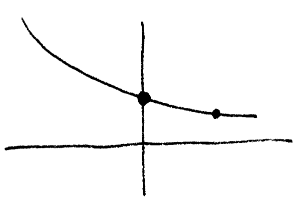
$a \in (1, \infty)$	$a \in (0,1)$
5. $y = a^x$ creciente	$y = a^x$ decreciente
6. $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$	$\lim_{x \to \infty} a^x = 0$
7. $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$

Representación gráfica

$a \in (1, \infty) \Rightarrow$



$a \in (0,1) \Rightarrow$



2. Ecuaciones exponenciales

Definición

Ec. exp. son aquellas en que la incógnita sólo aparece como exponente de potencias

Ecuaciones exponenciales fundamentales

Son aquellas en las que sólo aparecen dos potencias. Se resuelven igualando bases y como consecuencia exponentes [a^x es inyectiva]

Ejemplos y ejercicios

(...)

Caso general

Cuando aparecen más de dos potencias hay que transformar la ecuación en otra fundamental y para ello hay que hacer operaciones y tomar una incógnita auxiliar.

Ejemplos y ejercicios

(...)

3. La función logarítmica

(E) Hacer una operación sencilla tipo $\frac{ab}{c}$ poniendo todo como potencias.

Juan Neper, señor de Merchiston, inglés, 1450 − 1516

" Mirifici logarithmorum canonis descriptio " (Edimburgo 1614)

Definición

Sea $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ y $N \in \mathbb{R}$.

Se llama " logaritmo en base a de N " al número al que hay que elevar a para obtener N y se escribe $\log_a N$, e.d.:

$$\log_a N = x \iff a^x = N$$

Ejemplos

(...)

Consecuencia

$$a^{\log_a N} = N$$

$$\log_a a^N = N$$

(Las funciones $\log_a N$ y a^N son inversas una de la otra)

(Ex5)

Propiedades

1. $D(\log_a) = (0,\infty)$, e.d., los números negativos no tienen logaritmo

Si $N \leq 0$, $\log_a N = x \Rightarrow a^x = N$, imposible

2. $\log_a a = 1$

$\log_a a = x \Rightarrow a^x = a = a^1 \Rightarrow x = 1$

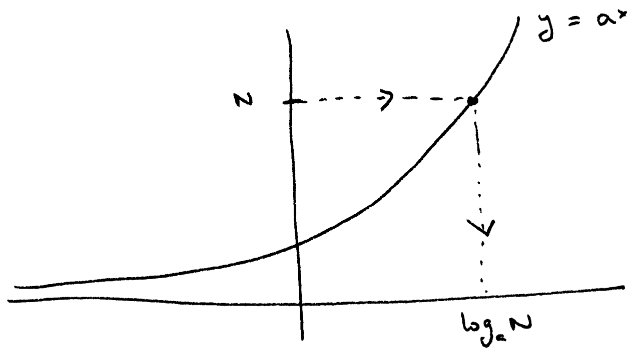
3. $\log_a 1 = 0$

$\log_a 1 = x \Rightarrow a^x = 1 = a^0 \Rightarrow x = 0$

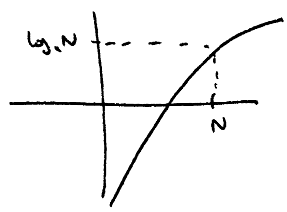
4. La función $y = \log_a x$ es continua

	$a \in (1,\infty)$	$a \in (0,1)$
5.	$y = \log_a x$ creciente	$y = \log_a x$ decreciente
6.	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \infty$
7.	$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$	$\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$

[5 a 7 se pueden demostrar graficando con:



$\rightarrow$

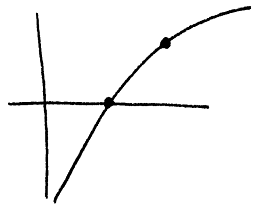


]

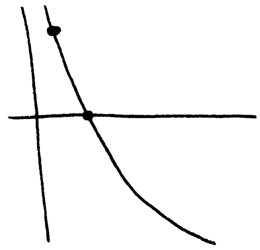
EX 6

Representación gráfica

$a \in (1, \infty) \Rightarrow$



$a \in (0, 1) \Rightarrow$



Casos particulares

1. Si $a = 10$, $\log_a N = \log_{10} N = \log N$ se llama logaritmo decimal de N
2. Si $a = e$, $\log_a N = \log_e N = \ln N = Ln\, N$ se llama log. neperiano de N

$\boxed{\text{Calculadora}}$

Logaritmo decimal de las potencias de 10

$$\log 1 = 0 \; ; \quad \begin{cases} \log 10 = 1 \; ; \; \log 100 = 2 \; ; \; \ldots \\ \log 0.1 = -1 \; ; \; \log 0.02 = -2 \; ; \; \ldots\ldots \end{cases}$$

Característica y mantisa de un número

$$100 < 214 < 1000 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2 < \log 214 < 3 \Rightarrow \log 214 = 2, \ldots\ldots$$

El log. decimal de un número que no es potencia de 10 consta de una parte entera que se llama característica y una decimal, que se llama mantisa.

Ex 7

4. Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de un producto

suprimible

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

Demostración

$$M \cdot N = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} = a^{\log_a M + \log_a N} \Rightarrow \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

Logaritmo de un cociente

(...)

Logaritmo de una potencia

$$\log_a N^k = k \log_a N$$

Logaritmo de una raíz

(...)

Ejemplos

a) Tomar log y ln en expresiones

b) Calcular log de un número sabiendo el de otros

c) Resolver ec. exp. fundamentales

Ex 8

Cambio de base de logaritmos

Si queremos conocer los $\log_b$ y conocemos $\log_a$, podemos hacer lo siguiente:

$$\log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N \Leftrightarrow \log_a b^x = \log_a N \Rightarrow x = \frac{\log_a N}{\log_a b}, \text{ e.d.}$$

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Ejemplo

a) Usuales

b) Calculo efectivo de logaritmos con $a \neq 10 \wedge a \neq e$

c) Resolución de ec. exp. fund. (método directo)

EX 9

5. Ecuaciones logarítmicas

Definición

Son aquellas en las que intervienen los logaritmos de la incógnita o estos son base de algún logaritmo. Ej ...

Se suelen resolver aplicando la definición de logaritmo

Ejemplos

[Cuidar que se utilicen al menos dos métodos]

EX - P

Ecuaciones exponenciales fundamentales

$100 = 2^{2x-4}$ $\quad$ $64 = 2^{x-5}$ $\quad$ $3^{1-x^2} - \frac{1}{27} = 0$

$8^x = 2$ $\quad$ $125 - 5^{3x^2} = 0$ $\quad$ $61^{x^2-9} = 1$

$\sqrt[3]{5} = 125^{4x-1}$ $\quad$ $5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$ $\quad$ $(x = \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$

$125^{\frac{x}{2}} = \sqrt[5]{25^{x-1}}$ $\quad$ $(x = -\frac{4}{11})$ $\quad$ $\sqrt[3]{81^{x+1}} = (3^x)^2$ $\quad$ $(x=2)$

$625^{2x+4} = \sqrt{5^{x-3}}$ $\quad$ $(x = -\frac{7}{3})$ $\quad$ $\sqrt{15^{x+1}} = 225^{6x-2}$ $\quad$ $(x = \frac{9}{23})$

Ecuaciones exponenciales

$16^x - 4^{x+1} = 192$ $\quad$ $4^x + 2^{x-1} = 68$

$4^{x+1} + 2^{x-1} = 68$ $\quad$ $9^x + 3^{x-1} = 84$

$4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$ $\quad$ $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

$2^x + 2^{x-1} + \ldots + 2^{x-4} = 1984$ $\quad$ $(x=10)$

$3^{x+2} + 9^{x-1} = 90$ $\quad$ $(x=2)$ $\quad$ $2^{x+2} + 4^{x-1} = 48$ $\quad$ $(x=3)$

$25^x - 5^{x+2} = 12500$ $\quad$ $9^x - 3^{x+1} = 648$

EX − P

Ecuaciones logarítmicas fundamentales

$\log_{5+x}(3+x) = -1$ $\quad (x = \sqrt{2} - 4)$

$\log_{2x} x^4 = 3$ $\quad (x = 8)$ $\qquad \log_{x^2} 2x^3 = 2$ $\quad (x = 2)$

$\log_{3x} x^5 = 4$ $\quad (x = 81)$ $\qquad \log_x (4x - 4) = 2$ $\quad (x = 2)$

Ecuaciones logarítmicas

$3\log x - 2\log(2x) = 2$ $\qquad 2\log x + 1 = \log x^3 + \log 2$

$\log x^2 - \log 4 = 2 + \log \frac{x}{2}$ $\qquad \log 5x = -1 + \log \frac{x^2}{4}$

$2\log x - \log \frac{x}{2} = 3$ $\qquad 1 + \log(4x) = \log(8x^2) - \log 5$

$\log x^2 - 2\log 5 = \log x + \log 2$ $\qquad -3 + \log x^2 = \log \frac{x}{2} - \log 5$

$\log x^2 = 3 + \log \frac{x}{10}$ $\quad (x = 100)$ $\qquad 3\log x - \log 32 = \log \frac{x}{2}$ $\quad (x = 4)$

$\log x - 2 = 3\log 8 - \log \frac{x^2}{10000}$ $\quad (x = 800)$

$\log \frac{x}{8} = \log x^2 - 6\log 2 - 2$ $\quad (x = 800)$

$\log 4x + 4\log 5 = \log x^2 + 1$ $\quad (x = 250)$

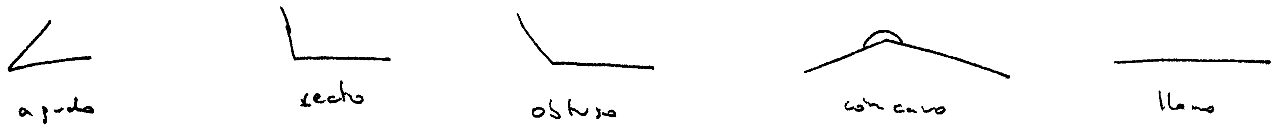
$\log 3x + 2\log 3 = \log x^2 - 1$ $\quad (x = 270)$

TR 1

Trigonometría

1. Ángulos

Tipos de ángulo



Grados sexagesimales

Grado sexagesimal es la nonagésima parte de un ángulo recto

Minuto

Segundo

Grados centesimales

Grado

Minuto

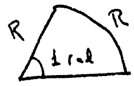
Segundo

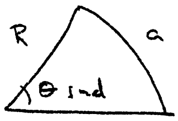
Radián

Radián es la medida del ángulo central cuyo arco mide un radio

$$\left.\begin{array}{lll} R & — & 1 \text{ rad.} \\ 2\pi R & — & x \text{ rad} \end{array}\right| \Rightarrow x = 2\pi$$

Medida de un arco de circunferencia

Como 

, 

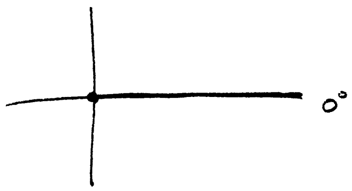
$a = R\theta$

Paso de una unidad a otra

1 circunf. $= 360^\circ = 400^g = 2\pi$ rad.

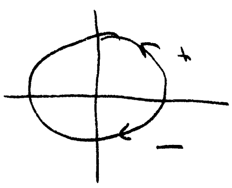
Origen y signo de ángulos

Cuando colocamos un ángulo en los ejes de coordenadas para estudiarlo, lo hacemos de modo que el vértice coincida con el origen de coordenadas y un lado sea el eje positivo de abscisas, esta semirrecta recibe el nombre de origen de ángulos



El ángulo queda definido por la posición de la otra semirrecta.

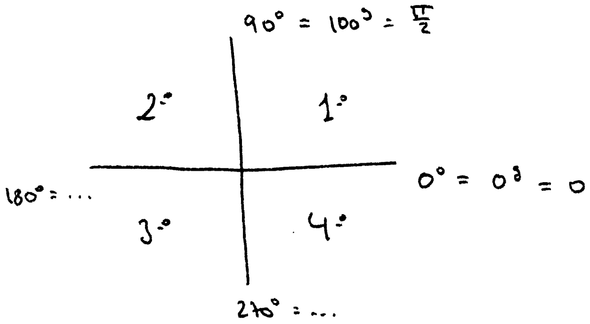
Si vamos del origen de ángulos a la otra semirrecta en el sentido contrario a las agujas de un reloj, estamos considerando el ángulo con signo positivo, y si vamos en el sentido de las agujas del reloj, lo consideramos negativo



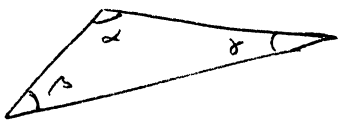
Ejemplo

(...)

Cuadrantes

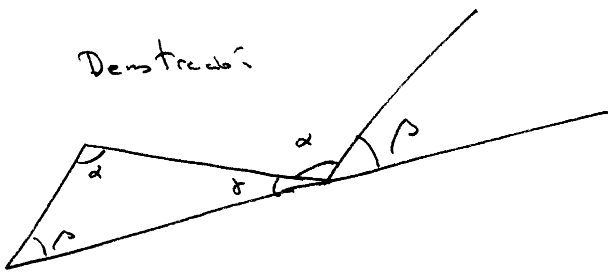


Suma de los ángulos de un triángulo



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Demostración



Clasificación de los triángulos

Por sus lados: escaleno, isósceles, equilátero

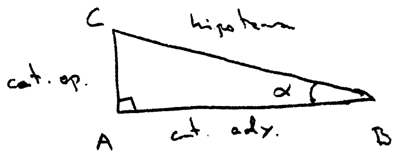
Por sus ángulos: acutángulo, rectángulo, obtusángulo

Teorema de Pitágoras

(...)

2. Razones trigonométricas

R.t. en un triángulo rectángulo



Se define

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$\cos\alpha =$

$\operatorname{tg}\alpha =$

$\sec\alpha =$

$\operatorname{cosec}\alpha =$

$\operatorname{ctg}\alpha =$

Estas definiciones solo sirven para ángulos de $(0, \frac{\pi}{2})$

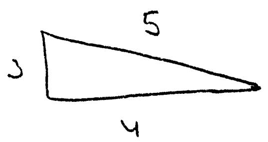
Propiedades

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Ejemplo



Observación

Los r.t. de un ángulo son iguales en cualesquiera triángulos rectángulos semejantes

(...)

R.t. de ángulos notables

1. 60°

2. 30°

3. 45°

Propiedad

En todo triángulo rectángulo cada cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto y a la hipotenusa por el coseno del ángulo contiguo

Notación

$(\operatorname{sen} \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha$ (etc.)

Relación pitagórica

(...)

Circunferencia trigonométrica

Es la que tiene radio 1 y el centro en el origen de coordenadas

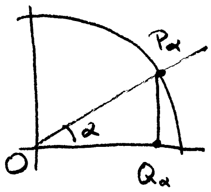
Cada ángulo α corta la circunferencia trigonométrica en un punto que llamaremos P_α.

Obsérvese que $P_\alpha = P_{\alpha+2\pi} = \cdots$

Investigación

Sólo tenemos definidas las r.t. de un ángulo cuando pertenece al primer cuadrante. Hay que intentar ampliar la definición.

Obsérvamos lo siguiente:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{P_\alpha Q_\alpha}{OP_\alpha} = \frac{P_\alpha Q_\alpha}{1} = P_\alpha Q_\alpha = \text{ordenada}\,(P_\alpha)$$

$$\cos\alpha = \qquad\qquad = \text{abscisa}\,(P_\alpha)$$

Definición

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ α es un ángulo medido en radianes. Se define

$$\operatorname{sen}\alpha = \text{ordenada}\,(P_\alpha)$$

$$\cos\alpha = \text{abscisa}\,(P_\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

[Calcular r.t. de $0°$, $\frac{\pi}{2}$, etc...]

Signo de las r.t.

1. sen α

+	+
−	−

2. cos α

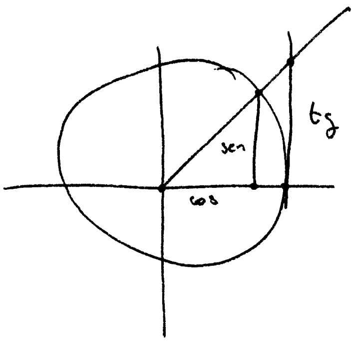
−	+
−	+

3. tg α

−	+
+	−

4. sec α, cosec α, ctg α. Como sus correspondientes

Líneas que representan las r.t.



Relación pitagórica

(...)

Consecuencias

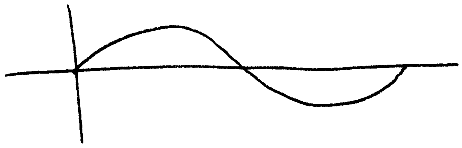
1. $tg^2 \alpha + 1 = sec^2 \alpha$

2. $1 + ctg^2 \alpha = cosec^2 \alpha$

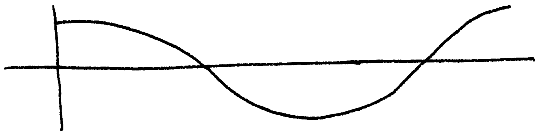
TR 8

Representación gráfica

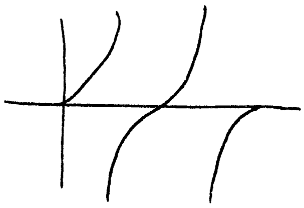
1. sen x



2. cos x



3. tg x



Dada una r.t., calcular las demás

1. Conocido sen α

   Rel. pit. y def. tg.

2. Conocido cos α

   Id.

3. Conocida tg α

   $$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$$

4. Conocidas sec α, cosec α o ctg α

   Reducir a casos anteriores.

3. Identidades trigonométricas

Son relaciones ciertas entre las r.t. de uno o más ángulos.

Vamos a demostrar las identidades trigonométricas que permiten calcular las r.t. de cualquier ángulo utilizando solo las de los que pertenezcan al intervalo $[0°, 45°]$

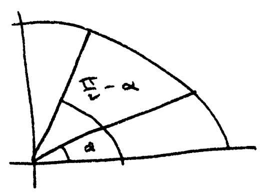
Ángulos que se diferencian en un número exacto de circunferencias

$\forall k \in \mathbb{Z} \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} : P_\alpha = P_{\alpha + 2k\pi}$, luego

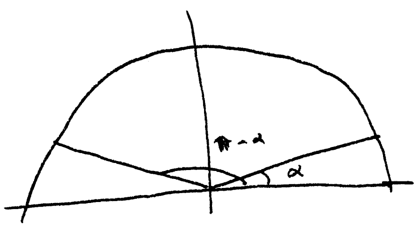
$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + 2k\pi)$

(...)

Ángulos complementarios

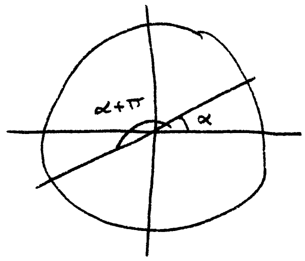


Ángulos suplementarios

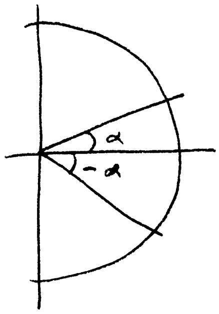


TR 10

Ángulos que se diferencian en π



Ángulos opuestos



Ejercicio

Ángulos que se diferencian en $\frac{\pi}{2}$

Ejercicio

Cálculo de la r.t. de un ángulo reduciéndolo a la de $[0, 45°]$

TR 11

4. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es hallar las longitudes de sus lados y las magnitudes de sus ángulos.

Funciones circulares inversas (funciones arco)

1. Si $a \in [-1,1]$, llamamos arcsen a a un ángulo cuyo seno sea a, es decir: $\arcsin a = \alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = a$

2. arccos

3. Si $a \in \mathbb{R}$, arctg

$\boxed{\text{Calculadora}}$

Observación

$\operatorname{sen}(\arcsin a) = a$

$\arcsin(\operatorname{sen} \alpha) = \alpha$

Son inversas una de la otra

TR12

Casos de resolución de triáng. rect.

En general para resolver un triángulo es suficiente conocer 3 datos.

Si el triángulo es rectángulo, ya sabemos que un ángulo es 90°, de modo que sólo faltan dos datos.

Según cuales sean conocidos, podemos distinguir cuatro casos:

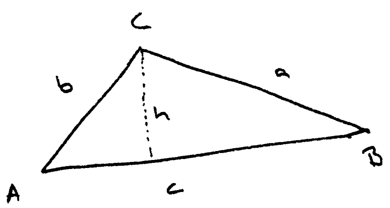
1. La hipotenusa y un ángulo
2. Un cateto y un ángulo
3. La hipotenusa y un cateto
4. Los dos catetos

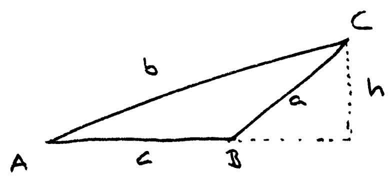
Para resolver cualquiera de los cuatro casos se usa el teorema de Pitágoras, las definiciones de las r.t. y las funciones circulares inversas.

Ejemplos y ejercicios

(...)

Area de un triángulo



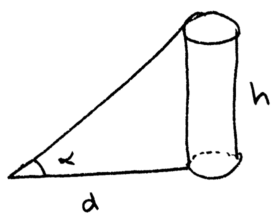


$h = a \operatorname{sen} \hat{B}$

$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c a \operatorname{sen} \hat{B}}{2}$$

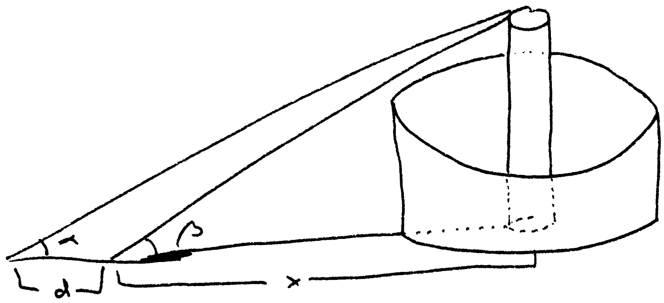
Altura de un edificio

a) De base accesible



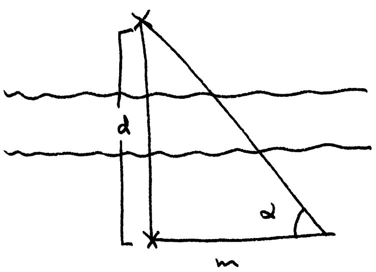
$$tg\,\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d\,tg\,\alpha$$

b) De base inaccesible



$$\left.\begin{array}{l} ctg\,\alpha = \dfrac{d+x}{h} \\ ctg\,\beta = \dfrac{x}{h} \end{array}\right\} \Rightarrow h = \frac{d}{ctg\,\alpha - ctg\,\beta}$$

Distancia a un punto inaccesible



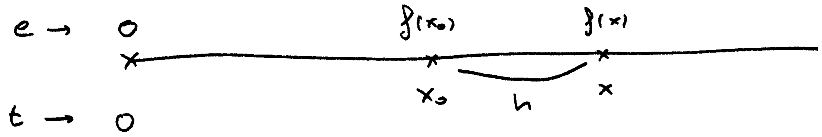
$$d = m\,tg\,\alpha$$

Cálculo diferencial

1. Derivada

E Dos problemas

I) Calcular la velocidad instantánea de un ciclista en un punto



x : tiempo

$f(x)$: distancia

a) Sensores en $f(x_0)$ y $f(x)$, para medir el tiempo h, p.ej.

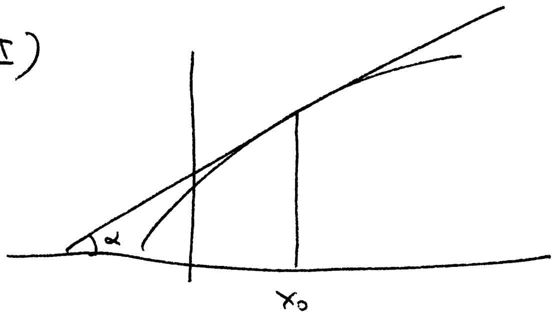
$f(x) - f(x_0)$		h		v
$= 10$ m	$\Rightarrow$	$h = 621$ ms	$\Rightarrow$	$v = 58$ km/h.
5		286 ms		63
1		56		64.5
0.05		3		64.93
↓		↓		↓
0		0		65 Km/h, solución

b) Fijos en tiempo x_0, le damos un tiempo h al ciclista para seguir rodando y medimos $f(x) = f(x_0+h)$

En tiempo h recorre $f(x) - f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$

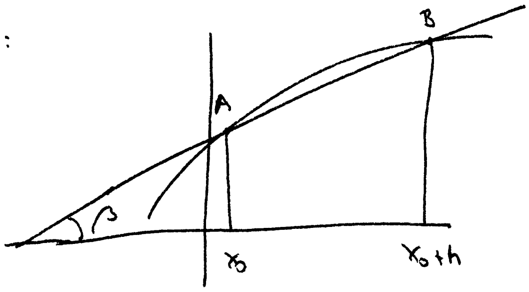
$$v = \frac{e}{t} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow v_{x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$, solución

II)



Calcular $tg\ \alpha$

Método :



$$tg\ \alpha = \lim_{B \to A} tg\ \beta = \dots = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$, solución

<u>Definición</u>

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se dice que " f es derivable en x_0 " cuando el

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ existe y es finito.

A ese valor se le llama " derivada de f en x_0 " y se escribe $f'(x_0)$.

Así pues, si f es derivable en x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

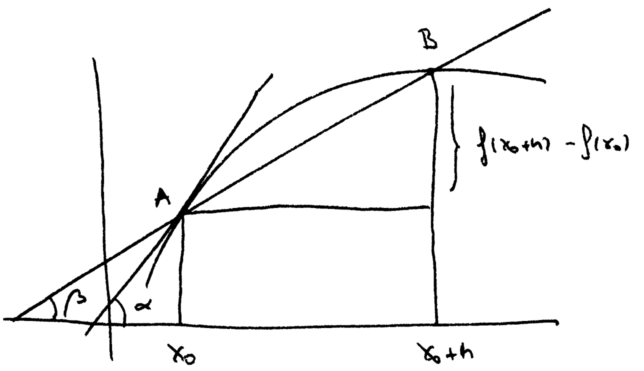
Ejemplo

a) Polinomios sencillos

b) sg

c) | |

Interpretación geométrica



$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = tg\,\beta$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} tg\,\beta = \lim_{B\to A} tg\,\beta = tg\,\alpha$$

$$f'(x_0) = tg\,\alpha$$

La derivada de una función en un punto es igual a la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta tangente a la función en ese punto.

Otra notación

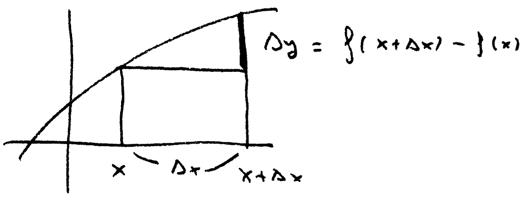
Si escribimos $y = f(x)$, al calcular la derivada a x_0 se escribe

$$y'_{x_0} = f'(x_0)$$

Incrementos y diferenciales

En matemáticas el aumento en el valor de una variable se llama "incremento" de esa variable, y se designa con la letra griega Δ (delta). Por ejemplo, un aumento en la variable z se escribe Δz (incremento de z)

Entonces



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

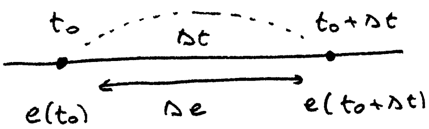
La derivada de una función en un punto es el límite cuando el incremento de la v.i. tiende a 0 del cociente del incr. de la v.d. entre el incr. de la v.i.

Cuando un incremento es infinitamente pequeño (tiende a cero) pasa a llamarse "diferencial" y se designa con la letra d. Por ej. si Δz es infinitamente pequeño se escribe dz (diferencial de z)

Entonces $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

Podemos escribir $dy = f'(x)\, dx$

Ejemplo físico



$$v_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = e'(t_0)$$

Ejemplo: $e(t) = 2t^2$, hallar v_2

Función derivada

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

Se dice que f es derivable cuando f es derivable en x $\forall x \in \mathbb{R}$

En ese caso se puede considerar la función $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f'(x)$, que se llama función derivada de f

Ejemplo: un polinomio de grado 2

Con la otra notación si derivamos $y = f(x)$ escribimos $y' = f'(x)$

Derivadas de orden superior

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es derivable, puede ocurrir que f' también lo sea. En ese caso se puede considerar la función $(f')'$, que se llama derivada segunda de f y se escribe f''. Si ésta es derivable, $(f'')' = f'''$ se llama derivada tercera de f.

En general, si $f^{(n}$ es derivable, $(f^{(n})' = f^{(n+1}$. El orden de $f^{(n}$ es n. Las derivadas de orden sup. se denotan con la otra notación y'', y''', ...

Ejemplo $x^2 + x + 1$

Proposición

1. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es derivable en x_0 entonces es continua en x_0
2. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es derivable entonces es continua.

Demostración

(...)

Consecuencia

Una función no es derivable en los puntos de discontinuidad

Contraejemplo

$f(x) = |x|$ es continua en 0, pero no es derivable en 0.

Así que las funciones pueden ser continuas pero no derivables

2. Cálculo de derivadas

Constante

$y = f(x) = k \Rightarrow y' = f'(x) = \dots = 0$; $\boxed{y = k \Rightarrow y' = 0}$

Identidad

(...)

Función potencial

(...)

Casos particulares

1. Raíz cuadrada

2. $y = \frac{1}{x}$

Suma

Si f y g son derivables, $f+g$ es derivable y $(f+g)' = f' + g'$

$\boxed{y = f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)}$

Demostración

$$(f+g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \dots = f'(x) + g'(x)$$

Producto

a) De dos funciones

Si f y g son derivables fg es derivable y $(fg)' = f'g + fg'$

$$\boxed{y = f(x)\,g(x) \Rightarrow y' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)}$$

Demostración

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \ldots$$

b) De tres funciones

(...)

c) De varias funciones [que lo piensen]

Caso particular: constante por función

$$y = k\,f(x) \Rightarrow y' = k\,f'(x)$$

Obsérvese que $y = \dfrac{f(x)}{k} = \dfrac{1}{k} f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{k} f'(x) = \dfrac{f'(x)}{k}$

Cociente

Si f y g son derivables $\dfrac{f}{g}$ también lo es y $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

Demostración [mejor por ln]

Observación

Derivar $\frac{f(x)}{k}$ como cociente

Función logarítmica

a) $y = \ln x$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h \to 0} \left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

b) $y = \log_a x$

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Función inversa

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y \qquad y \longrightarrow x$$

$$x + \Delta x \longrightarrow y + \Delta y \qquad y + \Delta y \longrightarrow x + \Delta x$$

$$f'(x) \cdot (f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} =$$

$[= y' \cdot x']$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x \cdot \Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Función exponencial

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$y' = ? \qquad x' = \frac{1}{y \ln a}$$

$$y' \cdot x' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = \boxed{a^x \ln a = y'}$$

Caso particular: e^x

(...)

Composición de funcions (Regla de la cadena)

a) De dos funcions

Si f y g son derivables, $g \circ f$ es derivable y $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

Demostración

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z$$

$$x + \Delta x \longrightarrow y + \Delta y \longrightarrow z + \Delta z$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot f'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$

$$= ((g' \circ f) \cdot f)(x)$$

b) De tres funciones

$$(h \circ g \circ f)' = (h \circ (g \circ f))' = (h' \circ (g \circ f)) \cdot (g \circ f)' =$$

$$= (h' \circ g \circ f) \cdot (g' \circ f) \cdot f'$$

c) De varias funciones [Que lo piensen]

Funciones trigonométricas

a) $y = \operatorname{sen} x \Rightarrow y' = \cos x$ (sin demostración)

b) $y = \cos x \Rightarrow y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} x$

c) $y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

d) $y = \operatorname{arc\,sen} x \Rightarrow x = \operatorname{sen} y$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$y' = ? \qquad x' = \cos y$

$$y' \cdot x' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

e) $y = \operatorname{arc\,cos} x$ (...)

f) $y = \operatorname{arc\,tg} x$ (...)

Derivación logarítmica

Si una función es difícil de derivar, se puede hacer el cálculo tomando ln:

$y = (\ldots\ldots)$

Así se pueden demostrar muchas de las fórmulas ya vistas, p. ej.:

$(\ldots)$

Derivación en forma implícita

A veces lo que se conoce de una función es una relación entre las dos variables. En ella se puede derivar

Ej. y ej.

$(\ldots)$

3. Crecimiento y convexidad de funciones

Notación

Vamos a designar por I un intervalo de ~~la~~ cualquier forma

Definiciones de crecimiento en intervalos

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función

1. Se dice que f es creciente en I cuando $\forall x, y \in I \mid x < y : f(x) < f(y)$
2. decreciente

Definiciones de crecimiento en un punto

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$

1. f creciente en $x_0 \iff \exists (a,b) \mid x_0 \in (a,b) \wedge f$ creciente en (a,b)
2. decreciente
3. f tiene un máx. rel. en $x_0 \iff \exists (a,b) \mid x_0 \in (a,b) \wedge \forall x \in (a,b) - \{x_0\} : f(x) < f(x_0)$
4. mín.

Conjuntos convexos y cóncavos

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto.

1. A es convexo $\iff \forall P, Q \in A : \overline{PQ} \subset A$
2. A es cóncavo cuando no es convexo, e.d.: $\exists P, Q \in A \mid \overline{PQ} \not\subset A$

Definiciones de convexidad en intervalos

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ función. Consideramos $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \wedge y \leq f(x) \}$.

1. f convexa en I $\iff$ A convexo
2. f cóncava en I $\iff$ A cóncavo

Definiciones de convexidad en un punto

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. f convexa en x_0 $\iff$ $\exists (a,b) \mid x_0 \in (a,b) \wedge f$ convexa en (a,b)
2. f cóncava en x_0 $\iff$ f no es convexa en x_0, es decir:

   $\forall (a,b) \mid x_0 \in (a,b) : f$ cóncava en (a,b)

3. f tiene un punto de inflexión en x_0 $\iff$ $\exists (a,b) \mid x_0 \in (a,b) \wedge$

   $\wedge$ f es cóncava en los puntos de (a, x_0) $\wedge$ f es convexa en los puntos de (x_0, b) (o viceversa)

Ejercicios

Dibujar distintos tipos de funciones

CD 15

4. Aplicación de las derivadas

Teoremas sobre crecimiento

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ suficientemente derivable [ⓔ] en $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ creciente en x_0
2. $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decreciente en x_0
3. f tiene un mx. rel. en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
4. mn.
5. $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mn. rel. en x_0
6. $<$ mx.

Ejemplos

a) Estudiar el crecimiento de una función en un punto

b) Cálculo de mx. y mn. rel.

Teoremas sobre convexidad

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ s. d. en $x_0 \in \mathbb{R}$

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ cóncava en x_0
2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ convexa en x_0
3. f tiene un p.i. en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$
4. $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un p.i. en x_0

Ejemplos

a) Estudiar la convexidad de una función en un punto.

b) Cálculo de p.i.

Tabla de derivadas

Constante	$y = k$	$y' = 0$		
Identidad	$y = x$	$y' = 1$		
Suma	$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$	$y = f(x) + g(x) + h(x)$	$y' = f'(x) + g'(x) + h'(x)$
Producto	$y = f(x)\cdot g(x)$	$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$y = f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$	$y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$
	$y = k\cdot f(x)$	$y' = k\cdot f'(x)$	$y = \frac{f(x)}{k}$	$y' = \frac{f'(x)}{k}$
Cociente	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$		
	$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$	$y = \frac{1}{f(x)}$	$y' = \frac{-1}{(f(x))^2}\cdot f'(x)$
Composición	$y = g(f(x))$	$y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	$y = h(g(f(x)))$	$y' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$
Potencia	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = (f(x))^n$	$y' = n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$
Raíz cuadrada	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{(f(x))}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{(f(x))}}\cdot f'(x)$
Logaritmo	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x}\cdot\log_a e$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\frac{1}{\ln a} = \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\log_a e$
Exponencial	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$
	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$
Seno	$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen}(f(x))$	$y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
Coseno	$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos(f(x))$	$y' = -\operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x)$
Tangente	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1+\operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg}(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = \sec^2 f(x) \cdot f'(x) = \ldots$
Arco seno	$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$y = \operatorname{arcsen}(f(x))$	$y' = \frac{1}{\sqrt{(1-f(x)^2)}}\cdot f'(x)$
Arco coseno	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$y = \arccos(f(x))$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{(1-f(x)^2)}}\cdot f'(x)$
Arco tangente	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctg}(f(x))$	$y' = \frac{1}{1+(f(x))^2}\cdot f'(x)$

Segundo de B.U.P. Matemáticas M. 22.5.1990

Ejercicios de cálculo diferencial 5ª evaluación

(*) Calcular las siguientes derivadas usando la definición y comprobarlas usando el cálculo de funciones derivadas

(1) $f'(-2)$, siendo $f(x) = 2x^2 - x - 6$ (2) $g'(1)$ siendo $g(x) = \frac{x+3}{x+1}$

(*) Derivar las siguientes funciones

(3) $y = x + 7$ (4) $z = tg\, y + \sqrt{7}$ (5) $t = \arcsen p + \log 8$

(6) $x = e^y \operatorname{sen} y$ (7) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^7}$ (8) $q = \log_4 y + \ln y + \log_6 5$

(9) $y = 5 \operatorname{sen} x + x \cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{15}$ (10) $y = \frac{6}{x} - \sqrt[7]{x^2}$ (11) $y = \frac{x+1}{x+2}$

(12) $y = \ln \operatorname{arctg} x$ (13) $y = \operatorname{arctg} \ln x$ (14) $y = \operatorname{sen} 7x + 5 \cos 6x$

(15) $y = \frac{1}{5^p + p^5}$ (16) $p = e^x \operatorname{sen} 6x$ (17) $y = \frac{5 \cos 7x}{6^x + \ln x}$

(18) $y = \operatorname{sen}^3 x^3$ (18) $h = tg^2 \operatorname{sen}^2 \cos^2 x$ (19) $y = \sqrt{x + \operatorname{sen} 5x}$

(20) $q = \operatorname{sen}\left(p^3 + \cos\left(\frac{1}{p} + \operatorname{arctg} p^2\right)\right)$ (21) $h = (6x^2 + 2)^6$

(*) Simplificar las siguientes funciones y después derivarlas

(22) $y = \frac{x^3 + 1}{x^3 + 1}$ (23) $z = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}}$ (24) $p = \ln \frac{h^6}{h^4}$

(25) $y = \frac{\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x-3}{x+3}}$ (26) $q = \ln(e^p \cdot \operatorname{arctg} p)$ (27) $y = \frac{1}{\frac{1}{x}}$

(*) Derivar las siguientes funciones y después simplificarlas lo más posible

(28) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (29) $y = \frac{x+1}{x6}$ (30) $y = x \ln x + e^x(x^2 + 6x)$

(31) $y = \frac{\operatorname{sen} 6x}{6}$ (32) $y = \operatorname{arctg} x^3$ (33) $y = \ln \operatorname{sen} x$

(*) Hallar las derivadas de las siguientes funciones usando derivación logarítmica

(34) $y = (\operatorname{sen} x)^{7x^2 + 6x}$ (35) $y = (x+3)^{5x+8}$

Segundo A

Fecha: J. 21. 11. 1985

Tiempo: 50'

1p. 1 Def. de sucesión decreciente

1p. 2 Def. de sucesión acotada superiormente

1p. 3 Definición de límite finito

2p. 4 Siendo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \to -2n+3$, $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $z \to \frac{z}{-6} + \frac{1}{2}$, hallar $g \circ f$

1p. 5 ¿Tienen inversa las sucesiones $a_n = 6n - 30$ y $b_n = n + 8$?

2p. 6 Estudiar la monotonía y la acotación de $x_n = n^2 - n + 2$

2p. 7 $\lim \left(\frac{2 + \frac{3}{n^2}}{n^3 + n} + n^2 - 5 \right)$

Para subir calificación

1 Escribir la def. de límite finito y explicar la idea que representa.

2 ¿Una sucesión decreciente puede tener por límite ∞? ¿Y $-\infty$? Explicarlo.

3 ¿Toda sucesión convergente debe ser acotada? ¿Toda suc. acotada debe ser convergente? Explicar.

Segundo B

Fecha: M. 26.11.1985

Tiempo: 50'

1p. (1) Def. de sucesión creciente

1p. (2) Def. de sucesión acotada inferiormente

1p. (3) Definición de límite finito

2p. (4) Siendo $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $q \to -2q+4$, hallar f^{-1}

1p. (5) ¿Tienen inversa las sucesiones $a_n = 4 - \sqrt{n}$ y $b_n = \frac{3n+1}{2}$? ¿Por qué?

2p. (6) Estudiar la monotonía y la acotación de $x_n = 2n^2 + 3n$

2p. (7) $\lim \left(n^2 + n - \dfrac{\frac{1}{n} + 1}{n + \frac{1}{n}} - 6 \right)$

Para subir calificación

(1) Escribir la definición de límite menos infinito y explicar la idea que representa

(2) ¿Una sucesión divergente puede ser acotada? ¿Y una monótona creciente?

(3) Si $a_n, b_n \to \infty$, $\lim \frac{a_n}{b_n}$ es indeterminado. Poner tres ejemplos en los que el límite salga ∞, 5 y 0, respectivamente.

X.4.2.87 50'

1.5 ① Def. lím. finito de una suc., def. dominio de una función

1 ② $\lim \left(2n + 5n^2 - 3n^7 + 5n^4 \right)$

1.5 ③ $\lim \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1} \right)$

1.5 ④ $\lim \left(\dfrac{n+6}{n+3} \right)^{2n}$

1 ⑤ $\lim \dfrac{3n^2 - 6n^3 + 1}{5n - 12n^3}$

2 ⑥ Repr. graf. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longrightarrow \begin{cases} 1 & x < -2 \\ |x| & -2 \leq x < 1 \\ \dfrac{x+1}{2} & x \geq 1 \end{cases}$$

1.5 ⑦ Dominio de $\alpha(x) = \dfrac{1}{x+5} - \sqrt{x+6}$

Para elevar calificación.

①

i) Calcular el límite de la sucesión $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$n \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n} & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$$

ii) Id. $b : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$n \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n} & n \text{ par} \\ 10^{-6} & n \text{ impar} \end{cases}$$

② Dominio de $f(x) = \sqrt{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}} - \dfrac{1}{(x^2-4)(x-7)}$

Segundo A

Fecha: J. 6.2.1986

Tiempo: 50'

1p. (1) Definición de función continua en un punto

2p. (2) Demostrar que cualquier función polinómica es continua

1p. (3) Hallar el dominio de $\alpha(x) = \dfrac{2}{x^2+x}$ y $\beta(x) = \sqrt{x-9}$

2p. (4) Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{5}{x^2+1}\right)^{2x^2}$

2p. (5) Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{4x^3 - 5x^2 + 1}$

2p. (6) Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1} + x}{\sqrt{4x^6+5} + x^2}$

Examen para subir calificación

(1) Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{\sqrt[3]{125x^3+7}} - \dfrac{2x+1}{5x} \right)$

(3) Definir una función con infinitos puntos de discontinuidad

Segundo B

Fecha: V.31.1.1986

Tiempo: 50'

1p. (1) Definición de límite finito de una función en un punto

2p. (2) Demostrar que si $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ entonces $f+g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

1p. (3) Hallar el dominio de $\alpha(x) = \dfrac{1}{4x-12}$ y $\beta(x) = \sqrt{x-2}$

2p. (4) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x^2 + x)^{\frac{3}{x^2}}$

2p. (5) Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 10}{2x^3 - 7x^2 + 9x - 6}$

2p. (6) Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3} \right)$

Examen para subir calificación

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{27x^3+1} - \sqrt{x+1}}$

(2) Definir una función que sólo tenga 3 puntos de discontinuidad, uno de cada tipo

(3) Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Segundo A

Fecha: X. 23.4.1986 Tiempo: 50'

1p. (1) Logaritmo de una raiz

1.5p (2) Tomar logaritmos en la expresión $\dfrac{\sqrt[5]{13^8}\cdot\sqrt[27]{10^{10}}}{23^{17}}$

" (3) Resolver la ecuación $9^x - 3^{x+2} = 486$

" (4) Resolver la ecuación $2\log x + 1 = \log x^3 + \log 2$

" (5) Demostrar que $1 + ctg^2\alpha = cosec^2\alpha$

" (6) Sabiendo que $tg\,\alpha = -4$ y $\alpha \in (90°, 180°)$, calcular las demás razones trig. de α

" (7) Calcular sen, cos y tg de $\frac{23}{6}\pi$, pasándolo antes a grados sexagesimales.

Para subir calificación

(1)
$$\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \\ e^x = \dfrac{e^{11}}{e^y} \end{cases}$$

(2) Encuentra todos los ángulos que puedas que verifiquen $tg\,\alpha = 1$

Segundo B

Fecha: M.15.4.1986 Tiempo: 50'

1p ① Definición de logaritmo

1.5p ② Tomar logaritmos en la expresión $\dfrac{\sqrt[7]{23^5}\cdot\sqrt[15]{10^2}}{17^{13}}$

" ③ Resolver la ecuación $4^x - 2^{x+3} = -16$

" ④ Resolver la ecuación $2\log x - \log \frac{x}{2} = 3$

" ⑤ Def. de seno, coseno y tg en la circunf. trigonométrica

" ⑥ Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = 2$ y $\alpha \in (180°, 270°)$, calcular las demás razones trigonométricas de α

" ⑦ Calcular sen, cos y tg de 502° sabiendo que sen 38° = 0.62 y cos 38° = 0.79

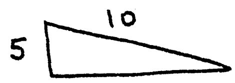
Para subir calificación

① $\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \\ e^x = \dfrac{e^{11}}{e^y} \end{cases}$

② Encuentra todos los ángulos que puedas que verifiquen $\operatorname{tg}\alpha = 1$

Segundo A

Fecha: L. 2. 6. 1986 Tiempo: 50'

1.5p (1) 

1.5p (2) Derivada de la función arc sen

-1 c.e. (3) $y = a^x$, $z = f(x)\, g(x)\, h(x)$, $t = \cos(f(x))$

-0.5 c.e. (4) $a = \sqrt[7]{x^5}$, $b = \operatorname{sen}\sqrt{x}$

2p. (5) $p = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + \operatorname{tg} x^3}\right)$

1.5p (6) $q = \operatorname{sen}^3 x^4$

1.5p (7) $\alpha = (\operatorname{tg} x)^{x^2+x}$

2p. (8) En forma implícita : $\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos x} = e^y + \ln(xy)$

Para subir nota

(1) Encontrar una función $f(x)$ cuya derivada sea $f'(x) = x^3 + x^2 + 1$

¿Se pueden encontrar más?

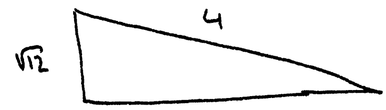
(2) Si $y = \log_x 2$, calcula y'

(3) Siendo $g(x) = x e^x$, calcular $g^{(n}(x)$

Segundo B

Fecha: X.4.6.1986 Tiempo: 50'

1.5p (1)



1.5p (2) Derivada de $y = \ln x$. Demostración

-1 c.e. (3) $y = \log_a x$, $z = \arccos x$, $t = a^{f(x)}$

-0.5 c.e. (4) $a = \operatorname{sen} \ln x$, $b = \sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}$

2p. (5) $p = \operatorname{tg}\left(x^2 + \log_3 \left(e^{x^2} + \frac{1}{x} \right) \right)$

1.5p (6) $q = \cos^2 \operatorname{sen}^3 x$

1.5p (7) $\alpha = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$

2p. (8) En forma implícita $e^y \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot y^3 = 5^{x^2 y^2}$

Para subir nota

(1) Encontrar una función f cuya derivada sea $f'(x) = \operatorname{sen} x + \cos x + x^2$

¿Se pueden encontrar más?

5b

(2) Si $g(x) = e^{2x}$, calcular $g^{(n}(x)$

5p. (3) Si $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(ex)}{x^e}$, calcular $h''(x)$

Segundo de B.U.P. Examen de septiembre

Hay que aprobar cada una de las tres partes

Parte A

0.5p ① Definiciones de sucesión convergente y divergente

1p ② Definición de función continua en un punto. Definición de función continua

1p ③ Siendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^2 + \frac{x-1}{2}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 4x+2$, hallar $g \circ f$

1p ④ Hallar las sucesiones inversas de $a_n = n^2 + n - 6$ y $b_n = \frac{1}{7n^3}$

1p ⑤ Decir el dominio de la función $\alpha(x) = \frac{1}{x^2+x-6} + \sqrt{x-1}$

2p ⑥ $\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}$ 2p ⑦ $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+5}{n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$

1.5p ⑧ $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{2x^2+3}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x^2+3x}$

Parte B

1p ① Definición de logaritmo. Logaritmo de un producto

2p ② Enunciar la relación trigonométrica. Dar dos demostraciones

1p ③ Tomar logaritmos decimales en las expresiones $\sqrt[5]{27^3 \cdot \sqrt{15}}$ y $\frac{31^5 \cdot \sqrt[7]{8}}{13^8 \cdot 10000}$

1p ④ Resolver la ecuación $36^x - 6^{x+1} = 1080$

1.5p ⑤ Resolver la ecuación $1 + \log(4x) = \log(8x^2) - \log 5$

1.5p ⑥ Hallar todas las razones trigonométricas de α sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = -4$ y $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

2p ⑦ Calcular sen, cos y tg de $837°$ sabiendo que $\operatorname{sen} 27° = 0.45$ y $\cos 27° = 0.89$

Parte C

2p ① Derivada de $y = \ln x$ y de $y = \operatorname{arcsen} x$. Demostración

1.5p ② Derivar $a = \sqrt[7]{x^2} + \frac{1}{x}$; $b = \operatorname{sen} \ln \sqrt{3x}$; $c = \operatorname{tg} 3x \cdot 2^x$

3p ③ Derivar $d = \frac{\cos x^2}{x + e^x}$; $e = \log\left(\operatorname{arctg} 5^{x+1}\right)$; $f = \operatorname{sen}^2 \cos^3 \operatorname{tg}^4 x$

1.5p ④ Calcular la derivada de la función $y = (x+5)^{\operatorname{sen} 3x}$

2p ⑤ Derivar en forma implícita la expresión

$$(\operatorname{sen} x)\, e^{y^2} \left(\sqrt{y}\right) = x^7 y^5 + \frac{\pi}{4}$$

Matemáticas Segundo de B.U.P. Septiembre de 1987

El examen constará de 6 partes independientes, en las que habrá que demostrar un dominio suficiente. En todas ellas habrá preguntas de teoría, en las que se buscarán los conceptos fundamentales del curso. Los problemas en los que hay que hacer especial atención se enuncian integrados en cada una de las seis partes:

Parte A Teoría de conjuntos
Operaciones unión, intersección y diferencia de conjuntos, utilizando los distintos tipos de intervalos de **R**. Operaciones suma, producto, composición e inversión de funciones reales de variable real.

Parte B Límites de sucesiones
Calcular términos de una sucesión conocido el término general, deducir éste a partir de los primeros. Operaciones suma, diferencia, producto, inversión y cociente de sucesiones. Cálculo de límites de sucesiones.

Parte C Límites de funciones
Representación gráfica de funciones reales de variable real definidas a trozos. Cálculo del dominio de una función. Cálculo de límites de funciones. Encontrar los puntos de discontinuidad de una función.

Parte D Las funciones exponencial y logarítmica
Representación gráfica de ambas. Cálculos con logaritmos. Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Parte E Trigonometría
Conocida una razón trigonométrica de un ángulo y el cuadrante al que pertenece, hallar todas las demás. Sabiendo las razones trigonométricas de los ángulos entre 0° y 45°, hallar las de cualquier otro. Resolución de triángulos rectángulos.

Parte F Cálculo diferencial
Cálculo de la derivada de una función en un punto por utilización directa de la definición. Cálculo de las funciones derivada primera y sucesivas de una función utilizando las reglas de derivación. Derivación logarítmica. Derivación en forma implícita. Estudio del crecimiento y la convexidad de una función en un punto. Determinación de los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de una función.

Nota Los alumnos de tercero de B.U.P. no tendrán obligación de contestar las preguntas de teoría ni ciertos problemas que no entraron en su programa, pero podrán hacerlo si así lo desean.

El profesor de la asignatura

Fdo.: Pedro Reina

Segundo de B.U.P. Examen de suficiencia

* (A1) Calcular $\left[(3,\rightarrow) \cap (-\infty,4)\right] \cup [4,5]$; $\left[(0,8) - (6,10)\right] \cup \{0\}$

(A2) Siendo $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x+1$, $g(x) = x^2-1$, calcular $f \cdot g$, $g \circ f$, $f \circ g$

(B1) Las sucesiones a_n, b_n y c_n tienen como primeros términos los que se indican:

$a \rightarrow 10, 8, 6, 4 \ldots$; $b \rightarrow 4, 9, 16, 25, \ldots$, $c \rightarrow -7, -4, -1, \ldots$

Hallar sus términos generales, y (si se puede) $\frac{1}{a_n}$, $\frac{1}{b_n}$, $\frac{1}{c_n}$, $2a_n - b_n c_n$

* (B2) Definición de sucesión acotada y sucesión convergente. ¿Qué relación hay entre ambas?

(B3) Estudiar la monotonía y la acotación de $\alpha_n = 1 - \frac{1}{n}$

(B4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - 2n^2 + 5n^3 - n^4\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^{2n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-n^2}{n^2+\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{4n^2-n}}$

(C1) Definición de dominio de una función. Poner 3 ejemplos. Calcular el de $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{1}{x^2-7x+1}$

* (C2) Definición de función continua en un punto. Ejemplos gráficos de puntos de discontinuidad.

(C3) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{5}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{2x^2-3x+1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

* (D1) Logaritmo de un cociente.

(D2) Representar gráficamente las funciones $y = 3^x$, $y = \log_2 x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

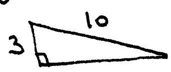
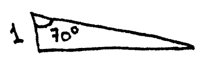
(D3) Resolver las ecuaciones $2^{2x-4} = 1024$; $9^x + 19 = 3^{x-1} + 3^{x-2}$ (hay dos soluciones, dar una)

(D4) Resolver las ecuaciones $\log_x 81 = 4$, $\log_2\left(\frac{1}{64}\right) = x$, $-3 + \log x^2 = \log\frac{x}{2} - \log 5$

* (E1) Definir todas las razones trigonométricas de un ángulo en la circunferencia trigonométrica.

(E2) Calcular seno y coseno de 170° y 350° sabiendo que $\operatorname{sen} 10^\circ = 0.17$, $\cos 10^\circ = 0.98$

(E3) Sabiendo que $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y $\operatorname{cosec}\alpha = 2$, hallar todas sus razones trigonométricas

(E4) Resolver los triángulos  

* (F1) Definición de derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.

* (F2) Calcular $f'(3)$ a partir de la definición de derivada siendo $f(x) = x^2 - 1 + x$

(F3) Derivar las siguientes funciones: $y = \sqrt{x} + x^7 + \sqrt[5]{x} + \log_4 x + \operatorname{arctg} x + 7^x$

$y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{e^{5x}} + (\ln x) \operatorname{arcsen} x \left(3^{x^2}\right) + \ln\sqrt{\ln\sqrt{\operatorname{arcsen} x}} + \operatorname{sen}^2 x^2 + x e^{5x}$; $y = (x+1)^{\cos x}$

(F4) Calcular las 3 primeras derivadas de $y = e^{3x} + \operatorname{sen} x \ln x + \frac{x^3}{6}$

* (F5) Estudiar el crecimiento y la concavidad de $g(x) = x^3 - x$ en $x = -1$ y $x = 2$

Los alumnos de Tercero de B.U.P. <u>no</u> contesten las preguntas con "*"