Las funciones exponencial y logarítmica

1. La función exponencial

Definición

1. Función exponencial es aquella que

   a) Tiene forma de potencia

   b) La variable independiente sólo aparece en el exponente

   c) La base es un número positivo distinto de 1

2. Sea $a \in \mathbb{R} \mid a \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Queremos definir a^x

$x \in \mathbb{N} \Rightarrow a^x = a \cdot a \cdot \overset{(x}{\cdots\cdots} \cdot a$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} a^x \text{ ya definido si } x \in \mathbb{N} \\ a^x = 1 \text{ si } x = 0 \\ x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow -x \in \mathbb{N}. \text{ Def: } a^x = \dfrac{1}{a^{-x}} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{m}{n} \Rightarrow$ Def: $a^x = \sqrt[n]{a^m}$

$x \in \mathbb{R} \rightarrow$ de modo que $y = a^x$ sea continua (se puede hacer por lim.)

Función exponencial será cualquiera de la forma $y = a^{f(x)} \mid f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

Propiedades inmediatas

Sean $a, b \in (0,1) \cup (1,\infty)$

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ 2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ 3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

4. $a^{xy} = (a^x)^y$ 5. $(ab)^x = a^x b^x$ 6. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Ex2

Definición

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

1. f creciente $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} \mid x < y : f(x) < f(y)$

2. decreciente

Propiedades

Sea $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$

1. $a^x > 0$

2. $a^0 = 1$

3. $a^1 = a$

4. $y = a^x$ continua.

$a \in (1, \infty)$

5. $y = a^x$ creciente

6. $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$

7. $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

$a \in (0,1)$

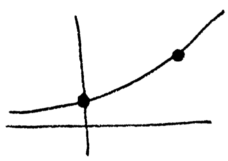
$y = a^x$ decreciente

$\lim_{x \to \infty} a^x = 0$

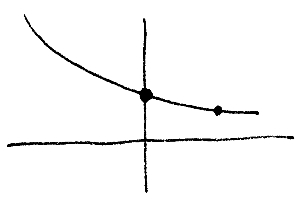
$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$

Representación gráfica

$a \in (1, \infty) \Rightarrow$



$a \in (0,1) \Rightarrow$



2. Ecuaciones exponenciales

Definición

Ec. exp. son aquellas en que la incógnita sólo aparece como exponente de potencias

Ecuaciones exponenciales fundamentales

Son aquellas en las que sólo aparecen dos potencias. Se resuelven igualando bases y como consecuencia exponentes [a^x es inyectiva]

Ejemplos y ejercicios

(...)

Caso general

Cuando aparecen más de dos potencias hay que transformar la ecuación en otra fundamental y para ello hay que hacer operaciones y tomar una incógnita auxiliar.

Ejemplos y ejercicios

(...)

3. La función logarítmica

(E) Hacer una operación sencilla tipo $\frac{ab}{c}$ poniendo todo como potencias.

Juan Neper, señor de Merchiston, inglés, 1450 − 1516

" Mirifici logarithmorum canonis descriptio " (Edimburgo 1614)

Definición

Sea $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ y $N \in \mathbb{R}$.

Se llama " logaritmo en base a de N " al número al que hay que elevar a para obtener N y se escribe $\log_a N$, e.d.:

$$\log_a N = x \iff a^x = N$$

Ejemplos

(...)

Consecuencia

$$a^{\log_a N} = N$$

$$\log_a a^N = N$$

(Las funciones $\log_a N$ y a^N son inversas una de la otra)

EXS

Propiedades

1. $D(\log_a) = (0,\infty)$, e.d., los números negativos no tienen logaritmo

Si $N \leq 0$, $\log_a N = x \Rightarrow a^x = N$, imposible

2. $\log_a a = 1$

$\log_a a = x \Rightarrow a^x = a = a^1 \Rightarrow x = 1$

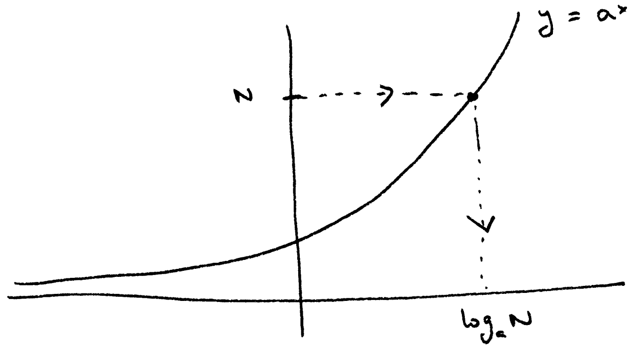
3. $\log_a 1 = 0$

$\log_a 1 = x \Rightarrow a^x = 1 = a^0 \Rightarrow x = 0$

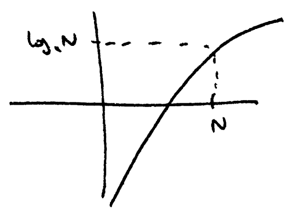
4. La función $y = \log_a x$ es continua

	$a \in (1,\infty)$	$a \in (0,1)$
5.	$y = \log_a x$ creciente	$y = \log_a x$ decreciente
6.	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \infty$
7.	$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$	$\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$

[5 a 7 se pueden demostrar gráficamente con:



$\rightarrow$

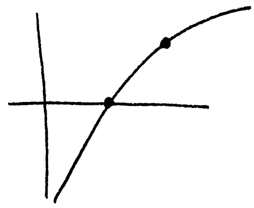


]

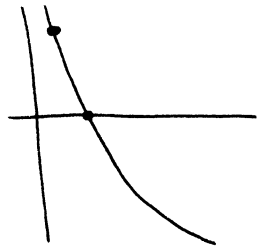
Ex 6

Representación gráfica

$a \in (1, \infty) \Rightarrow$



$a \in (0, 1) \Rightarrow$



Casos particulares

1. Si $a = 10$, $\log_a N = \log_{10} N = \log N$ se llama logaritmo decimal de N
2. Si $a = e$, $\log_a N = \log_e N = \ln N = Ln\, N$ se llama log. neperiano de N

$\boxed{\text{Calculadora}}$

Logaritmo decimal de las potencias de 10

$$\log 1 = 0 \; ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \log 10 = 1 \; ; \quad \log 100 = 2 \; ; \quad \ldots \\ \log 0.1 = -1 \; ; \quad \log 0.02 = -2 \; ; \quad \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Característica y mantisa de un número

$$100 < 214 < 1000 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2 < \log 214 < 3 \Rightarrow \log 214 = 2, \ldots\ldots$$

El log. decimal de un número que no es potencia de 10 consta de una parte entera que se llama característica y una decimal, que se llama mantisa.

EX 7

4. Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de un producto

$$\log_a (MN) \overset{\swarrow \text{suprimible}}{=} \log_a M + \log_a N$$

Demostración

$$M \cdot N = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} = a^{\log_a M + \log_a N} \Rightarrow \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

Logaritmo de un cociente

(...)

Logaritmo de una potencia

$$\log_a N^k = k \log_a N$$

Logaritmo de una raíz

(...)

Ejemplos

a) Tomar log y ln en expresiones

b) Calcular log de un número sabiendo el de otros

c) Resolver ec. exp. fundamentales

Cambio de base de logaritmos

Si queremos conocer los $\log_b$ y conocemos $\log_a$, podemos hacer lo siguiente:

$$\log_b N = x \iff b^x = N \iff \log_a b^x = \log_a N \Rightarrow x = \frac{\log_a N}{\log_a b}\text{, e.d.}$$

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Ejemplos

a) Usuales

b) Calculo efectivo de logaritmos con $a \neq 10 \wedge a \neq e$

c) Resolución de ec. exp. fund. (método directo)

5. Ecuaciones logarítmicas

Definición

Son aquellas en los que intervienen los logaritmos de la incógnita o estos son base de algún logaritmo. Ej ....

Se suelen resolver aplicando la definición de logaritmo

Ejemplo

[Cuidar que se utilicen al menos dos métodos]

EX - P

Ecuaciones exponenciales fundamentales

$100 = 2^{2x-4}$ $\qquad 64 = 2^{x-5}$ $\qquad 3^{1-x^2} - \dfrac{1}{27} = 0$

$8^x = 2$ $\qquad 125 - 5^{3x^2} = 0$ $\qquad 61^{x^2-9} = 1$

$\sqrt[3]{5} = 125^{4x-1}$ $\qquad 5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$ $\quad (x = \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$

$125^{\frac{x}{2}} = \sqrt[5]{25^{x-1}}$ $\quad (x = -\frac{4}{11})$ $\qquad \sqrt[3]{81^{x+1}} = (3^x)^2$ $\quad (x = 2)$

$625^{2x+4} = \sqrt{5^{x-3}}$ $\quad (x = -\frac{7}{3})$ $\qquad \sqrt{15^{x+1}} = 225^{6x-2}$ $\quad (x = \frac{9}{23})$

Ecuaciones exponenciales

$16^x - 4^{x+1} = 192$ $\qquad 4^x + 2^{x-1} = 68$

$4^{x+1} + 2^{x-1} = 68$ $\qquad 9^x + 3^{x-1} = 84$

$4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$ $\qquad 9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

$2^x + 2^{x-1} + \dots + 2^{x-4} = 1984$ $\quad (x = 10)$

$3^{x+2} + 9^{x-1} = 90$ $\quad (x = 2)$ $\qquad 2^{x+2} + 4^{x-1} = 48$ $\quad (x = 3)$

$25^x - 5^{x+2} = 12500$ $\qquad 9^x - 3^{x+1} = 648$

EX - P

Ecuaciones logarítmicas fundamentales

$\log_{5+x}(3+x) = -1$ $\quad (x = \sqrt{2} - 4)$

$\log_{2x} x^4 = 3$ $\quad (x = 8)$

$\log_{x^2} 2x^3 = 2$ $\quad (x = 2)$

$\log_{3x} x^5 = 4$ $\quad (x = 81)$

$\log_x (4x - 4) = 2$ $\quad (x = 2)$

Ecuaciones logarítmicas

$3\log x - 2\log(2x) = 2$

$2\log x + 1 = \log x^3 + \log 2$

$\log x^2 - \log 4 = 2 + \log \frac{x}{2}$

$\log 5x = -1 + \log \frac{x^2}{4}$

$2\log x - \log \frac{x}{2} = 3$

$1 + \log(4x) = \log(8x^2) - \log 5$

$\log x^2 - 2\log 5 = \log x + \log 2$

$-3 + \log x^2 = \log \frac{x}{2} - \log 5$

$\log x^2 = 3 + \log \frac{x}{10}$ $\quad (x = 100)$

$3\log x - \log 32 = \log \frac{x}{2}$ $\quad (x = 4)$

$\log x - 2 = 3\log 8 - \log \frac{x^2}{10000}$ $\quad (x = 800)$

$\log \frac{x}{8} = \log x^2 - 6\log 2 - 2$ $\quad (x = 800)$

$\log 4x + 4\log 5 = \log x^2 + 1$ $\quad (x = 250)$

$\log 3x + 2\log 3 = \log x^2 - 1$ $\quad (x = 270)$