Límite de sucesiones

1. Sucesiones

(E) Generalización del concepto de progresión. Idea de "tira" de cosas.

Definición

Dado un conjunto V se dice que "a" es una sucesión de elementos de V cuando $a : \mathbb{N} \to V$ es una aplicación.

Si V es un conj. numérico se dice que a es una suc. numérica

Notación

Sea $a : \mathbb{N} \to V$ una sucesión

$a(1) = a_1$ se llama primer elemento de la sucesión

$\vdots$

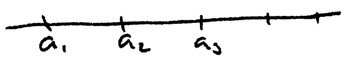
$a(n) = a_n$ " " enésimo " " " "

La sucesión también se puede llamar $\{a_n\}$ y se dice que a_n es el término general de la sucesión a

Problema práctico

A veces se da una sucesión diciendo sus primeros elementos y es necesario encontrar el término general.

Representación gráfica de una sucesión

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de n. reales 

Definiciones de crecimiento

Sea $\{a_n\}$ una s.n.r.

1. Se dice que $\{a_n\}$ es creciente cuando todo término es menor que el siguiente, e.d. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

2. Decreciente.

Definiciones de acotación

Sea $\{a_n\}$ una s.n.r.

1. Se dice que el número real K es cota superior de una sucesión cuando es mayor o igual que todos los elementos de esa sucesión

   $K \in \mathbb{R}$ cota sup. de $\{a_n\} \iff \forall n \in \mathbb{N} : K \geq a_n$

2. Cota inferior

3. Una suc. está acotada sup. cuando tiene alguna cota sup.

   $\{a_n\}$ ac. sup. $\iff \exists K \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : K \geq a_n$

4. Ac. inf.

5. Una suc. está acotada cuando está ac. sup. e inf.

   $\{a_n\}$ acotada $\iff \exists K_1, K_2 \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : K_1 \leq a_n \leq K_2$

2. Operaciones con sucesiones

Igualdad

Se dice que dos sucesiones son iguales cuando todos sus elementos correspondientes son iguales, e. d.: $\{a_n\} = \{b_n\} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n = b_n$

Operaciones

Las sucesiones se pueden sumar, restar y multiplicar sin ninguna restricción. Las operaciones se realizan término a término y el término general se obtiene haciendo la misma operación.

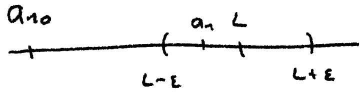
Cociente

Para utilizar una sucesión como denominador hay que asegurarse de que ninguno de sus términos es cero.

Si existe, la sucesión $\frac{1}{a_n}$ se llama inversa de a_n

3. Definiciones de límite

(E) Proximidad cada vez mayor



Calcular $a_n = \dfrac{n+K}{n}$ para n alto. Ver que $\to 1$

Definición de límite finito

Sea $\{a_n\}$ una s.n.r. y $L \in \mathbb{R}$.

Se dice que el límite de $\{a_n\}$ es L cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

Se escribe $\lim a_n = L$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$; $a_n \to L$; $a_n \xrightarrow{n\to\infty} L$

Ejemplos [SUPRIMIBLE, se puede hacer intuitivamente]

1. $\lim \dfrac{1}{n} = 0$

Hay que dem. que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 : \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Elegimos un $\varepsilon > 0$ y vamos a encontrar el n_0

$\frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \iff -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$. ; $-\varepsilon < \frac{1}{n}$ siempre es cierto,

luego lo que hay que buscar que se cumple es $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Esto es cierto cuando $\frac{1}{\varepsilon} < n$, así que basta elegir un n_0 que sea $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (hay infinitos para elegir). Entonces

$$\left.\begin{array}{l} n > n_0 \\ n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right\} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$, como queríamos

Por tanto, si elegimos para $\varepsilon>0$ un $n_0 \in \mathbb{N} \mid n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, será cierto que

$\forall n > n_0 : \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, c.q.d.

LSS

2. $\forall c \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} c = c$

[E.d.: la sucesión $a_n = c$ tiene por límite c]

Hay que demostrar que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : c \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$,

pero como esto es cierto siempre, se puede tomar cualquier n_0

Ejercicios

Dado a_n, intentar calcular $\lim a_n$ con calculadora.

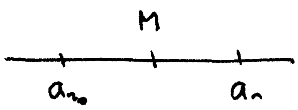
Definiciones de convergencia

1. Una suc. es convergente cuando tiene algún límite finito
2. " " " divergente " no tiene límite finito

Proposiciones [SUPRIMIBLE]

1. Si una sucesión es convergente, el límite es único
2. Toda sucesión convergente está acotada
3. Toda sucesión creciente y ac. sup. es conv.
4. " " decreciente " " inf. " "

Definiciones de límite infinito

E 

; $n^2 \to \infty$ (tomando valores; $M \to n_0$)

Sea $\{a_n\}$ una s.n.r.

1. Se dice que la sucesión a_n tiene por límite infinito cuando

   $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : a_n > M$

   Se escribe $\lim a_n = \infty$ .... y se dice que a_n "diverge a infinito"

2. Menos infinito

Ejemplos [SUPRIMIBLE , o darlo intuitivamente]

1. $\lim n = \infty$

[Tomando $n_0 > M$]

2. $\lim (-n) = -\infty$

[Tomando $n_0 > -M$]

Resumen

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim c = c$$

$$\lim n = \infty$$

$$\lim (-n) = -\infty$$

4. Operaciones con límites

Casos generales

Sean a_n y b_n dos sucesiones

1. $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

   $\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$

2. $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

3. $\lim (a_n / b_n) = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$

4. $\lim (a_n^{b_n}) = (\lim a_n)^{\lim b_n}$

Ejemplos

Casos particulares

Las siguientes expresiones son simbólicas y para productos y cocientes hay que tener en cuenta la regla de los signos

1a. $a + \infty = \infty$

1b. $a - \infty = -\infty$

1c. $\infty + \infty = \infty$

1d. $-\infty - \infty = -\infty$

2a. $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot \infty = \infty$

2b. $\infty \cdot \infty = \infty$

3a. $\dfrac{a}{\infty} = 0$

3b. $\dfrac{\infty}{a} = \infty$

3c. $\dfrac{a}{0} = \infty$

4a. $\infty^{\infty} = \infty$

4b. $\infty^{-\infty} = 0$

4c. $0^{\infty} = 0$

4d. $0^{-\infty} = \infty$

4e. $\infty^{b} = \begin{cases} \infty & b > 0 \\ 0 & b < 0 \end{cases}$

4f. $a^{\infty} = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$

4g. $a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ \infty & 0 < a < 1 \end{cases}$

Ejemplos

Indeterminaciones

Las siguientes expresiones son "indeterminadas", es decir, no se puede afirmar a priori el carácter (convergencia o no) de la sucesión resultante, sino que hay que conocer las sucesiones que la forman.

1. $\infty - \infty$

2. $0 \cdot \infty$

3a. $\frac{\infty}{\infty}$

3b. $\frac{0}{0}$

4a. 1^{∞}

4b. ∞^{0}

4c. 0^{0}

5. Cálculo de límites

De sucesiones polinómicas

Sucesión polinómica es la que tiene como término general un polinomio, como $a_n = 2n^6 - 3n^3 + 4n - 8$

Sus límites son ∞ ó $-\infty$, pero casi siempre aparecen como una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para resolverla basta sacar factor común la mayor potencia de n.

De sucesiones cociente de polinomios

Si $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios de variable n, queremos calcular $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$, como por ejemplo [los tres tipos]

Algunos se pueden resolver directamente, pero lo más usual es que sean indeterminados del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

La indeterminación se resuelve sacando factor común en el numerador y el denominador independientemente.

[Proponer que descubran una regla general]

6. El número e

Ejercicio

Adivinar $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Proposición

La sucesión $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es convergente

Demostración

[Según tiempo]

Definición

$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Es irracional. Su desarrollo decimal comienza: 2.71828182845

Proposición

$\lim a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

Ejemplos de utilización

Interesantes

Fibonacci

Método de diferencias sucesivas

¿ $\exists \{a_n\}$ s. n. r. | .... ?

Siendo $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sucesión, hallar q para que a sea convergente

LS-P

Cálculo efectivo

$$\lim \frac{\sqrt{\quad}}{\sim\sim} \qquad \lim \frac{\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}}$$

$$\lim \left(\sqrt{\quad} - \sim\sim\right) \qquad \lim \left(\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}\right)$$

Algunas diferencias salen sacando factor común

$$\lim \left(\frac{n^2+n+1}{n+1} - n + 1 \right)$$

$$\lim \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{n}{1-n} + 1}{\frac{n}{n^2-1}}$$

$$\lim \frac{\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}}{\frac{n}{3n+4} - \frac{1}{3}}$$

LS - P1

Hallar término general

Preparatorios:

4	8	12	16	$4n$
4	5	6	7	$n+3$
4	4	4	4	4
4	2	0	-2	$-2n+6$

Primera tanda:

1	4	9	16	n^2
0	3	8	15	n^2-1
1	4	7	10	$3n-2$
4	3	2	1	$-n+5$
2	$\frac{4}{2}$	2	$\frac{8}{4}$	2
2	4	8	16	2^n

Segunda tanda:

4	9	16	25	$(n+1)^2$
3	9	27	81	3^n
4	10	28	82	3^n+1
4	11	30	85	3^n+n
7	15	23	31	$8n-1$
-2	5	12	19	$7n-9$
-1	1	-1	1	$(-1)^n$

Tercera tanda:

3	7	11	15	$4n-1$
-3	7	-11	15	$(-1)^n(4n-1)$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{n}{2}$
25	36	49	64	$(n+4)^2$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	4^{n-3}
16	8	4	2	2^{5-n}

Cuarta tanda:

1	(-1)	1	-1	$(-1)^{n+1}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{2n+1}{3n+1}$
$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2n-5}{2n+2}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{2^{n-1}}{n+4}$
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{n^2}{2}$

LS - P3

Quinta tenda

$\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[4]{4}$		$\sqrt[n+1]{n+1}$
1	-4	9	-16	$(-1)^n n^2$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{-n+4}{2n+1}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{26}{7}$	$\frac{3^{n-1}-1}{2n-1}$
1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{27}{4}$	$\frac{3^{n-1}}{n}$
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{n-1}{n+3}$

Matemáticas Segundo de B.U.P., grupo A Curso 1991-92

Examen de recuperación de la parte B: Límite de sucesiones. ***Fecha: X.19.2.1992***

1. Definición de cota superior de una sucesión.

2. Definición de límite finito de una sucesión.

3. Siendo $a_n = \dfrac{n^3+65}{n^2+5n}$, calcular con 4 decimales a_4, y a_{143}

4. Representa gráficamente los 5 primeros elementos de la sucesión $b_n = 3n-5$. Estudia su crecimiento y acotación.

5. Siendo $c_n = 7n-56$, $d_n = 3n+2$, $e_n = 8n-9$, calcula

   a) $\dfrac{3c_n+2d_n}{e_n}$ b) $\dfrac{d_n e_n}{c_n}$

6. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim (5+n^2)(-n^3+5n)$ b) $\lim (3n^2+4n^6-3n+24)$ c) $\lim \dfrac{9n^3+1}{n+3n^3}$

   d) $\lim \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{n} \right)^{4n+1}$ e) $\lim \left(1 + \frac{5}{4n+3} \right)^{n}$ f) $\lim (6n^{-3} + 3)$

<u>Valor de las preguntas:</u> 1: *medio punto*; 2, 3 y 5: *un punto*
4: *un punto y medio*; 6: *cinco puntos*

Matemáticas Segundo de B.U.P., grupo A Curso 1991-92

Examen de subir nota de la parte B: Límite de sucesiones. ***Fecha: X.19.2.1992***

1. ¿Crees que hay alguna sucesión acotada con límite infinito? Justifica tu respuesta.
2. ¿Crees que hay alguna sucesión con límite 5 y los 100 primeros términos negativos? Justifica tu respuesta.
3. ¿Crees que hay alguna sucesión con límite -3 y cota superior -5? Justifica tu respuesta.
4. Calcula los siguientes límites sin usar la calculadora:

   a) $\lim \dfrac{5^{n+3}}{5^n}$ b) $\lim \dfrac{5^n}{3^{n+1}}$ c) $\lim \dfrac{(1/5)^{n+2}}{(1/3)^n}$

5. Una sucesión se puede definir *recursivamente* cuando para conocer un elemento hay que conocer alguno o alguno de los anteriores. Este es un ejemplo:

   $a_1 = 2.44 \times 10^{34}$ (el primer elemento es conocido, y se da en notación científica)

   $a_n = \text{raiz}(a_{n-1})$ para $n>1$ (a partir del segundo elemento, cada elemento se calcula como la raiz cuadrada del anterior).

   Escribe los 20 primeros elementos de esta sucesión.
   ¿Te parece que existe el $\lim a_n$?

Matemáticas Segundo de B.U.P., grupo C Curso 1991-92

Examen de recuperación de la parte B: Límite de sucesiones. ***Fecha: X.22.1.1992***

1. Definición de cota inferior de una sucesión.

2. Definición de límite finito de una sucesión.

3. Siendo $a_n = \dfrac{n^3+85}{n^2+2n}$, calcular con 4 decimales a_3, y a_{135}

4. Representa gráficamente los 5 primeros elementos de la sucesión $b_n = 2n+3$. Estudia su crecimiento y acotación.

5. Siendo $c_n = 8n-32$, $d_n = 2n+1$, $e_n = 7n-6$, calcula

   a) $\dfrac{3c_n+2d_n}{e_n}$ b) $\dfrac{d_n e_n}{c_n}$

6. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim (3+n^2)(-n^3+n)$ b) $\lim (2n^2+3n^6-7n+11)$ c) $\lim \dfrac{8n^3+3}{n+2n^3}$

   d) $\lim \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{n}\right)^{6n+3}$ e) $\lim \left(1+\frac{4}{3n+5}\right)^n$ f) $\lim (3n^{-2}+5)$

<u>Valor de las preguntas:</u> 1: *medio punto*; 2, 3 y 5: *un punto*
4: *un punto y medio*; 6: *cinco puntos*

Matemáticas Segundo de B.U.P., grupo C Curso 1991-92

Examen de subir nota de la parte B: Límite de sucesiones. ***Fecha: X.22.1.1992***

1. ¿Crees que hay alguna sucesión acotada con límite menos infinito? Justifica tu respuesta.
2. ¿Crees que hay alguna sucesión con límite -1 y los 100 primeros términos positivos? Justifica tu respuesta.
3. ¿Crees que hay alguna sucesión con límite -3 y cota inferior 2? Justifica tu respuesta.
4. Calcula los siguientes límites sin usar la calculadora:

   a) $\lim \dfrac{2^{n+1}}{2^n}$ b) $\lim \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$ c) $\lim \dfrac{(1/3)^{n+1}}{(1/2)^n}$

5. La sucesión de *Fibonacci* se define de la siguiente manera:
   $a_1 = a_2 = 1$ (los dos primeros elementos son 1);

   $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n>2$ (a partir del tercer elemento, cada elemento se calcula sumando los dos anteriores).
   Escribe los 20 primeros elementos de la sucesión de *Fibonacci*.
   Calcula el cociente a_{n+1}/a_n para los valores de n 10, 15, 18 y 19, dando los resultados con 4 decimales. ¿Te parece que existe el $\lim (a_{n+1}/a_n)$?

Matemáticas **Segundo de B.U.P.** **Curso 1991-92**

Hoja de problemas. ***Parte B : Límite de sucesiones.*** **Fecha: M.10.12.1991**

Calcula los siguientes límites. Antes debes intentar razonar cuál puede ser el límite, y luego demostrarlo. Recuerda que muchos pueden salir directamente por teoría de límites, aunque algunos pueden ser indeterminados. Éstos debes intentar calcularlos usando tu ingenio o inspirándote en los métodos explicados. Cuando todo falle, puedes intentar calcularlos con la calculadora o el ordenador; en este caso, da los resultados con cuatro decimales.

(1) $\lim \left(\frac{2^n-1}{5+\frac{1}{n}}\right)\left(2-n^2\right)$	(2) $\lim \left(3-5n+4n^7-5n^4\right)$	(3) $\lim \frac{6-2n^2+5n}{7n^2+3n-1}$
(4) $\lim \frac{n+\sqrt{n}}{2-\frac{5}{n}}$	(5) $\lim \frac{6n^3+4n^2}{2-3n}$	(6) $\lim \left(3-\frac{4}{n^2}\right)^{\frac{2}{n}+\frac{1}{2}}$
(7) $\lim \left(-3n^3+5+8n\right)$	(8) $\lim \left(\sqrt{2-\frac{1}{n}}-\sqrt{n-\frac{1}{2}}\right)$	(9) $\lim \left(\frac{5+n^2}{3+n}+\frac{5}{4}\right)$
(10) $\lim \left(1+\frac{3}{2n}\right)^{5n}$	(11) $\lim \sqrt[n]{n}$	(12) $\lim \left(1-\frac{2}{5n^2}\right)^{-n^2}$
(13) $\lim \left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}\right)$	(14) $\lim \left(1+\frac{2n}{1+n^2}\right)^{5n}$	(15) $\lim \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}\right)$
(16) $\lim \frac{\sqrt{64n+10}}{\sqrt{4n+1}}$	(17) $\lim \left(\sqrt{n+8}-\sqrt{n+1}\right)$	(18) $\lim \frac{\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}}{\frac{n}{3n+1}-\frac{1}{3}}$
(19) $\lim \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{3n}$	(20) $\lim \left(\frac{n^2+n+1}{n+1}-n+1\right)$	(21) $\lim \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$
(22) $\lim \left(\sqrt[3]{n+5}-\sqrt[3]{n+1}\right)$	(23) $\lim \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n+1}$	(24) $\lim \frac{\frac{1}{n+1}+\frac{n}{1-n}+1}{\frac{n}{n^2-1}}$