Teoría de conjuntos

1. Conjuntos

Diccionario de símbolos

$\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\emptyset$, $\forall$, $\exists$, $\exists!$, $:$, $|$, $\wedge$,

$\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ∞

Definiciones sobre conjuntos

Conjunto es la consideración en un todo de distintos entes

Los entes pueden, en principio, tener cualquier naturaleza

Los conj. se nombran con letras mayúsculas de cualquier alfabeto

Los entes que constituyen un conjunto se llaman elementos de ese conjunto

Se nombran con letras minúsculas de cualquier alfabeto.

Si el ente "a" pertenece al conjunto "A" se escribe $a \in A$

______ no ______ $a \notin A$

Un conjunto se puede definir de dos formas:

- Por extensión, nombrando todos sus elementos. El conjunto entonces se escribe poniendo entre llaves sus elementos: $A = \{ \ldots \}$
- Por comprensión, diciendo la característica que sólo es cumplida por sus elementos. El conj. se escribe así: $A = \{ x \mid \text{condición} \}$

Para que un conjunto esté bien definido debe poderse decidir si cualquier ente pertenece a él o no

Cardinal de un conjunto es el número de elementos que tiene.

Se escribe $\mathrm{card}(A)$ ó $\#(A)$. Ejemplo: $\mathrm{card}(\emptyset) = 0$

Subconjuntos

Dados dos conjuntos A y M se dice que A es una parte de M, o que A es un subconjunto de M o que M es un subconjunto de A cuando todos los elementos de A pertenecen a M. Se escribe $A \subset M$ (A contenido en M). Es decir: $A \subset M \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in M$

Operaciones con conjuntos

Sean A y B dos conjuntos

Unión de A y B es el conjunto de elementos que están en A o en B

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \lor x \in B \}$$

Intersección

Diferencia

Conjuntos numéricos

Son aquellos que sólo tienen números como elementos

Los más importantes son

Conjunto de números naturales $\mathbb{N}$

enteros $\mathbb{Z}$

racionales $\mathbb{Q}$

reales $\mathbb{R}$

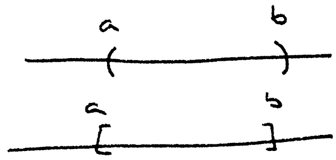
[Representación gráfica]

Intervalos

Sean $a,b \in \mathbb{R} \mid a < b$

$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$



$[a,b)$

$(a,b]$

$[a,\infty) = [a,\to)$

(a,∞)

$(-\infty,b]$

$(-\infty,b)$

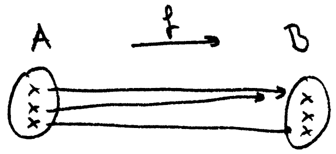
2. Funciones

(E) Una vez que hemos definido los conjuntos hay que estudiar sus relaciones. Esto se hace por medio de funciones.

Def. correspondencia

Sean A y B dos conjuntos

Una correspondencia entre A y B es cualquier manera de relacionar a elementos de A elementos de B. Se puede nombrar con cualquier símbolo.



Escribiremos $f : A \to B$ (se lee " f de A en B")

A es el conjunto de salida o partida de la correspondencia

B llegada

Si f relaciona $x \in A$ con $y, z, t \ldots \in B$ $\left(x \xrightarrow{f} y, z, t, \ldots \right)$

decimos que $\{ y, z, t \ldots \}$ es la imagen de x mediante f y se escribe $f(x) = \{ y, z, t, \ldots \}$. Si $f(x)$ sólo tiene un elemento, p. ej. y, basta escribir $f(x) = y$

Def. de función o aplicación

Es cualquier correspondencia entre dos conjuntos tal que todos los elementos del conjunto de salida tienen imagen y sólamente una, es decir

$\forall x \in A \ \exists! \ y \in B \mid f(x) = y$

y es la imagen de x mediante f

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ x & \longrightarrow & y \end{array}$$

<u>Definición clásica de función</u>

Muchas veces para obtener el valor de "y" basta con hacer unas operaciones con la x, p. e.: $y = 5x - 2$

Por eso se suele decir que función es "la relación de dependencia entre dos variables".

x es la variable independiente (pertenece al conj. de partida)
y " " " dependiente (" " " " llegada)

<u>Ejemplos</u>

a) Usar variables mudas
b) Dado $f(x)$, hallar $f(x+1)$, $f(2x)$, etc...

<u>Suma y producto de funciones</u>

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones

1. La función suma de f y g se escribe $f+g$ y se define así:

$$\begin{aligned} f+g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) + g(x) \end{aligned}, \text{ es decir: } (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

La diferencia se considera como particular de la suma.

2. Producto

<u>Composición de funciones</u>

Sean A, B, C conj. y $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones.

La función composición de f y g se escribe $g \circ f$ y se define así:

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ x &\to g(f(x)) \end{aligned}, \text{ es decir: } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Función inversa

Supongamos que $f: A \to B$ es una función que verifica que todos los elementos de B son imágenes de uno sólo de A (se llama función biyectiva)

Entonces se puede definir la función inversa de f, que se escribe f^{-1}:

$$\begin{aligned} f^{-1}: B &\to A \\ y &\to x \end{aligned}$$ donde x es el único elemento de A tal que $f(x) = y$

Ejemplo

1. $\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to 3x \end{aligned} \longrightarrow y = 3x \longrightarrow x = \frac{y}{3} \longrightarrow \begin{aligned} f^{-1}: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\to \frac{y}{3} \end{aligned}$

etc...

Cuando se calcula la función inversa se invierten los papeles de la variable dependiente e independiente.

TC – P1

Interesante

1) Hallar $f \circ f$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \begin{cases} 0 & x \in (-1,1) \\ \frac{x}{2} & x \notin (-1,1) \end{cases}$

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$n \longrightarrow \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ 2n & n \text{ impar} \end{cases}$

2) Hallar $f \cdot g$, $f + g$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \begin{cases} 6 & x \in (-2,2) \\ 0 & x \notin (-2,2) \end{cases}$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \begin{cases} 1 & x \in (-1,1) \\ 0 & \notin \end{cases}$

3) $f \mid (f \circ f)(x) = 3x^4$

4) card $\{ f : A \rightarrow B \}$

5) $f \mid f + f = f \cdot f \quad (f \neq cte)$

6) Estudiar biyectividades

Matemáticas Segundo de B.U.P. Grupo A

Parte A: Conjuntos. ***Examen de recuperación.*** **Fecha: M.29.10.1991**

1. Definición de unión de conjuntos.

2. Definición de composición de funciones.

3. Escribe de la manera más sencilla los siguientes conjuntos:

   a) $[3, 6) \cap [5, 9)$
   b) $(-3, 0) \cup [0, 1)$
   c) $(-2, 2] - (1, 5]$
   d) $[-1, 1] - \mathbf{N}$

4. Siendo f, g, h: **R** ⟶ **R** definidas por

   $f(x) = 4x + 2$, $g(y) = 3y^2 + 2$, $h(z) = 1 - 4z$, hallar

   a) $f + g - h$
   b) fg
   c) f^{-1}
   d) $g \circ h$
   e) $h \circ f$

<u>Valor de las preguntas:</u>

1, 2: *Un punto y medio*
3: *Dos puntos (medio cada apartado)*
4: *Cinco puntos (uno cada apartado)*

$\boxed{\text{Subir nota}}$

1. Buscar $A, B \subset \mathbb{R} \mid A \cup B = [0,8] \wedge A \cap B = [4,5)$. ¿Cuántas soluciones?

2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Escribe $f \circ f$

   $n \to \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2n & \text{" " " impar} \end{cases}$

3. Siendo $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \frac{x-1}{3}$, $g(x) = \frac{3-x}{6}$. Hallar $f^{-1} + g^{-1}$

Matemáticas **Segundo de B.U.P.** **Grupo C**

Parte A: Conjuntos. ***Examen de recuperación.*** **Fecha: M.20.10.1991**

1. Definición de intersección de conjuntos.

2. Definición de composición de funciones.

3. Escribe de la manera más sencilla los siguientes conjuntos:

   a) $[2, 5) \cap [4, 9)$
   b) $(-4, 0) \cup [0, 2)$
   c) $(-3, 2] - (1, 6]$
   d) $[-1, 1] - \mathbf{N}$

4. Siendo f, g, h: **R** ⟶ **R** definidas por

   $f(x) = 2x + 1$, $g(y) = 2y^2 + 3$, $h(z) = 5 - 3z$, hallar

   a) $f + g - h$
   b) fg
   c) f^{-1}
   d) $g \circ h$
   e) $h \circ f$

<u>Valor de las preguntas:</u>

1, 2: *Un punto y medio*
3: *Dos puntos (medio cada apartado)*
4: *Cinco puntos (uno cada apartado)*

$\boxed{\text{Subir nota}}$

1 $A = \{*, \square\}$, $B = \{a, b, c\}$. card$(\{f: A \to B \mid f$ es aplicación$\})$

¿Cuántas son biyectivas?

2 Define $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ a) $(f \circ f)(x) = x^4$; b) $(f \circ f)(x) = 8x^4$; c) $(f \circ f)(x) = 2x^4$

3 Siendo $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \frac{5-2x}{3}$, $g(x) = \frac{x+1}{2}$, hallar $f^{-1} \circ g \circ f^{-1}$