Trigonometría

1. Identidades trigonométricas

Repaso de segundo

Paso de unas unidades a otras. Calculadora

Definiciones y líneas de las razones trigonométricas

Memorizar las r. t. de $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

Dada una razón, calcular las demás (relación pitagórica y derivadas)

Ángulos complementarios, suplementarios, que se dif. en π, opuestos

Definición

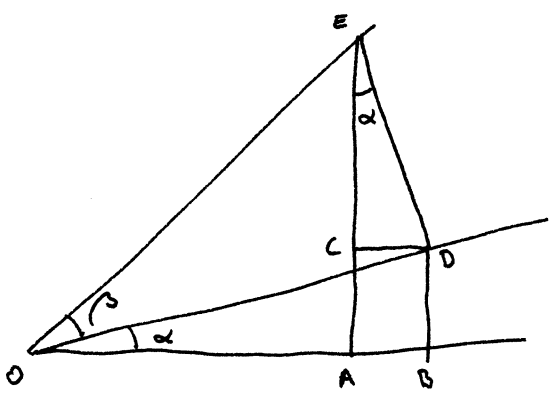
Identidad trigonométrica es una relación tautológica entre varias razones trigonométricas de uno o más ángulos. [Ejemplos]

Ejercicios sencillos

Salir de un miembro y llegar a otro

Hacer $\operatorname{sen}^2\alpha = p$ (p. ej.) y llegar a una identidad en p

Seno y coseno de una suma



$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{AE}{OE} = \frac{BD + CE}{OE} =$$

$$= \frac{OD \operatorname{sen}\alpha + ED\cos\alpha}{OE} = \frac{OE\cos\beta\operatorname{sen}\alpha + OE\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{OE} =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$OA = OB - CD$$

Ejemplos

Consecuencias

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha-\beta)$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$

Ejercicios

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)$

$\cos(\alpha+\beta-\gamma)$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$

Razones del ángulo doble

$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \cdots = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha =$

$\operatorname{tg} 2\alpha =$

Ejemplo

Problema típico

Es muy común tener que expresar todas las r.t. que aparezcan en función de una sola.

Por ejemplo: si $\cos\alpha = p$, escribir $\operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-p^2$

Razones del ángulo mitad

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \text{sen}^2\beta \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} \cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} \\ 1 &= \cos^2\frac{\alpha}{2} + \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sumando: } \ldots \\ \text{Restando: } \ldots \end{cases}$$

Ejemplos

Ejemplo

Si $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$, ¿cuánto vale $\cos x$?

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \text{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Transformación de sumas en productos.

1. $\text{sen}\,p \pm \text{sen}\,q$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ \text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\beta \\ \text{sen}(\alpha+\beta) - \text{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta = p \\ \alpha-\beta \Rightarrow q \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{p+q}{2} \wedge \beta = \frac{p-q}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

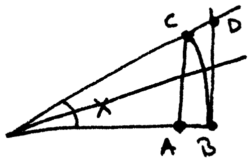
$$\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2\cos\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}$$

2. $\cos p \pm \cos q$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta) = \cdots \\ \cos(\alpha-\beta) = \cdots\end{array}\right\} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = 2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}\end{array}\right.$$

Ejemplos

<u>Derivada de $y = \text{sen}\, x$</u>



$\overline{AC} = \text{sen}\, x \quad ; \quad \overset{\frown}{CB} = x \quad ; \quad \overline{BD} = \text{tg}\, x$

$$\text{sen}\, x < x < \text{tg}\, x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\text{sen}\, x} < \frac{\text{tg}\, x}{\text{sen}\, x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen}\, x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen}\, x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$$

$$(\text{sen}\, x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\text{sen}\,\frac{h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

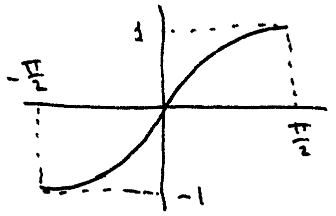
2. Ecuaciones trigonométricas

Definición

Ecuaciones trig. son aquellas en las que lo que se conoce de las incógnitas son relaciones entre ella y sus razones trigonométricas. Ej.

Funciones circulares inversas (funciones arco)

Arc sen)

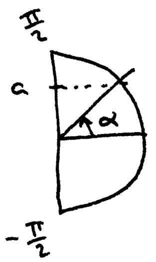


$\forall\, a \in [-1,1]$ se define arcsen a como el único ángulo

$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\operatorname{sen} \alpha = a$

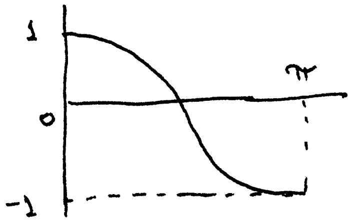
↑

Investigado con la calculadora

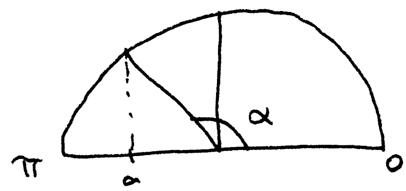


$\boxed{\text{Calculadora}}$

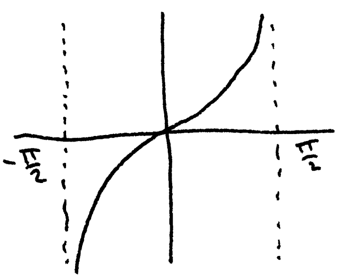
Arc cos)



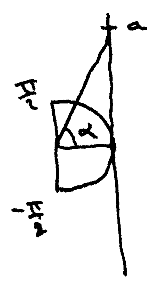
$\forall\, a \in [-1,1]$ ....



Arc tg)



$\forall\, a \in \mathbb{R}$ ....



Ecuaciones trigonométricas fundamentales

1. $\operatorname{sen} x = m$; $\alpha = \operatorname{arcsen} m$; $x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

2. $\cos x = n$; $\alpha = \arccos n$; $x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ -\alpha + 2k\pi \end{cases} = 2k\pi \pm \alpha$ $k \in \mathbb{Z}$

3. $\operatorname{tg} x = p$; $\alpha = \operatorname{arctg} p$; $x = \begin{cases} \alpha + 2k\pi \\ \alpha + \pi + 2k\pi \end{cases} = \alpha + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Ecuaciones con una incógnita

Para resolverlas hay que transformarlas en ec. trig. fund., lo que se consigue escribiendo todas las razones que aparezcan en función de una sola.

Ejemplos

Sistemas

3. Resolución de triángulos

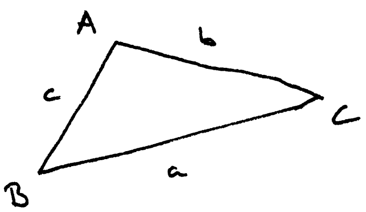
Resolver un triángulo es averiguar las medidas de sus tres ángulos y las longitudes de sus tres lados

Para resolver un triángulo basta conocer 3 datos que sean independientes, es decir, que no pueda ser expresado uno de ellos en función de los otros dos.

Un triángulo puede ser resuelto gráficamente si y sólo si se puede resolver analíticamente

En todo triángulo cualquier lado es menor que la suma de los otros dos
" " " a lado mayor se opone ángulo mayor

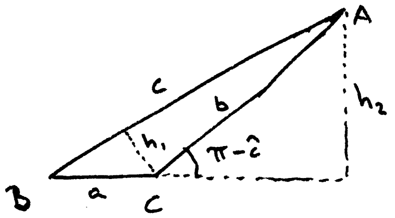
Notación



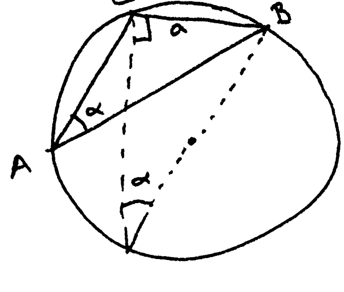
Teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R,$$ donde R es el radio de la circunf. circunscrita

Demostración



$$\left.\begin{aligned} h_1 &= b\operatorname{sen}\hat{A} = a\operatorname{sen}\hat{B} \\ h_2 &= c\operatorname{sen}\hat{B} = b\operatorname{sen}(\pi-\hat{C}) = b\operatorname{sen}\hat{C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dots$$



$$\hat{A} = \alpha = \frac{\widehat{CB}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R} = \operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R$$

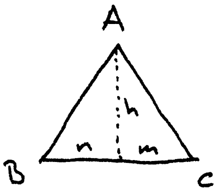
Teorema del coseno

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

Demostración

Si $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$, queda demostrado por el tma. de Pitágoras

$\hat{B} < \frac{\pi}{2}$

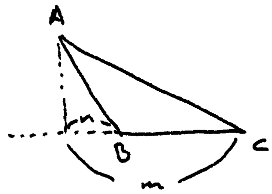


$$b^2 = h^2 + m^2$$

$h = c\,\mathrm{sen}\,\hat{B}$

$m = a - n = a - c\cos\hat{B}$

$\hat{B} > \frac{\pi}{2}$



$h = c\,\mathrm{sen}(\pi - \hat{B}) = c\,\mathrm{sen}\,\hat{B}$

$m = a + n = a + c\cos(\pi - \hat{B}) = a - c\cos\hat{B}$

$$b^2 = (c\,\mathrm{sen}\,\hat{B})^2 + (a - c\cos\hat{B})^2 = \dots = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

Teorema de las tangentes

Sean e y f dos lados cualesquiera de un triángulo y $\hat{E}$ y $\hat{F}$ sus ángulos opuestos. Entonces
$$\frac{e+f}{e-f} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\hat{E}+\hat{F}}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\hat{E}-\hat{F}}{2}}$$

Demostración

$$\frac{e}{\mathrm{sen}\,\hat{E}} = \frac{f}{\mathrm{sen}\,\hat{F}} \Rightarrow \frac{e+f}{\mathrm{sen}\,\hat{E}+\mathrm{sen}\,\hat{F}} = \frac{e-f}{\mathrm{sen}\,\hat{E}-\mathrm{sen}\,\hat{F}} \Rightarrow \frac{e+f}{e-f} = \frac{\mathrm{sen}\,\hat{E}+\mathrm{sen}\,\hat{F}}{\mathrm{sen}\,\hat{E}-\mathrm{sen}\,\hat{F}} =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\hat{E}+\hat{F}}{2}\cos\frac{\hat{E}-\hat{F}}{2}}{2\cos\frac{\hat{E}+\hat{F}}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\hat{E}-\hat{F}}{2}} = \frac{\mathrm{tg}\,\frac{\hat{E}+\hat{F}}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\hat{E}-\hat{F}}{2}}$$

Resolución de triángulos

Caso I — Un lado y dos ángulos  ALA

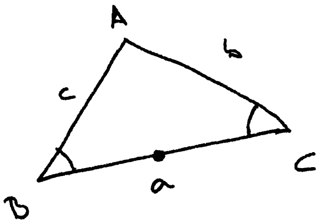
Caso II — Dos lados y el ángulo comprendido  LAL

Caso III — Los tres lados  LLL

Caso IV — Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos  LLA

[Hay varios caminos en cada caso]

Caso I ALA



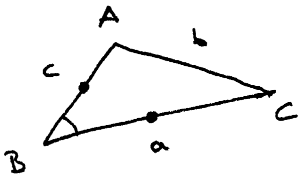
Datos : $a, \hat{B}, \hat{C}$

Incógnitas : $b, c, \hat{A}$

$$\hat{A} = \pi - (\hat{B} + \hat{C})$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \quad b = \frac{a \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} \quad \wedge \quad c = \frac{a \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}$$

Caso II LAL



Datos : $a, c, \hat{B}$

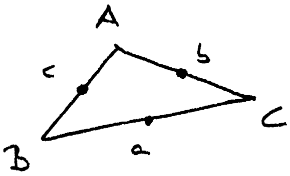
Incógnitas : $b, \hat{A}, \hat{C}$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\hat{A}-\hat{C}}{2}} \quad \wedge \quad \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\hat{A}-\hat{C}}{2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{a-c}{a+c}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2}\right)\right) \\ \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A} = (+) \quad ; \quad \hat{C} = (-)$$

Caso III LLL



Datos: a, b, c Incógnitas: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

α) Resolución gráfica

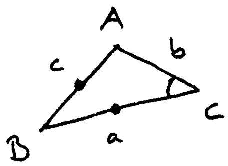
Cada lado debe ser menor menor que la suma de los otros dos

β) Resolución analítica

Dos por el teo. del coseno y el otro sustituyendo

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} < 1 \overset{\text{Desarrollando}}{\Rightarrow} a < b+c$$

Caso IV LLA

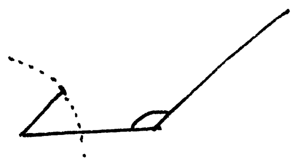


Datos: $a, c, \hat{C}$; Incógnitas: $b, \hat{A}, \hat{B}$

α) Resolución gráfica

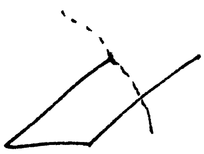
1. $\hat{C} \geq \frac{\pi}{2}$

a) $c \leq a$



No hay solución

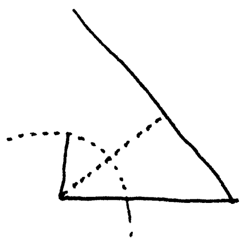
b) $c > a$



Una solución

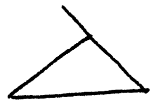
2. $\hat{C} < \frac{\pi}{2}$

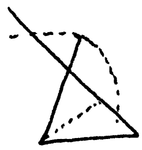
a) $c < a \operatorname{sen} \hat{C}$

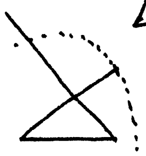


No hay solución

TR 11

b) $c = a \operatorname{sen} \hat{C}$  Una solución $(\hat{A} = \frac{\pi}{2})$

c) $a \operatorname{sen} \hat{C} < c < a$  Dos solucions $(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \pi)$ (dem.)

d) $c \geq a$  Una solución

β) Resolución analítica

Si suponemos calculado $\hat{A}$, se puede terminar así:

$\hat{B} = \pi - (\hat{A} + \hat{C})$, $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}}$.

Así pues, hay que calcular $\hat{A}$:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{c}; \quad \frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{c} = 1 \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{c} < 1 \Rightarrow \hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 & \text{agudo} \\ \hat{A}_2 & \text{obtu} \end{cases}$$

1. $\hat{C} \geq \frac{\pi}{2}$

a) $c \leq a \Rightarrow \hat{C} \leq \hat{A} \Rightarrow \hat{A} \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} \geq \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$, contr., luego no hay sol.

b) $c > a \Rightarrow c > a\operatorname{sen}\hat{C} \Rightarrow 1 > \frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{c} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}_1$

No puede ser $\hat{A} = \hat{A}_2 > \frac{\pi}{2}$ porque sería $\hat{A} + \hat{C} > \pi$ $\Bigg\} \rightarrow$ Una sol.

2. $\hat{C} < \frac{\pi}{2}$

a) $c < a\operatorname{sen}\hat{C} \Rightarrow 1 < \frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{c} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} > 1$, contr., no hay sol.

b) $c = a\operatorname{sen}\hat{C} \Rightarrow \dots \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}$, una sol.

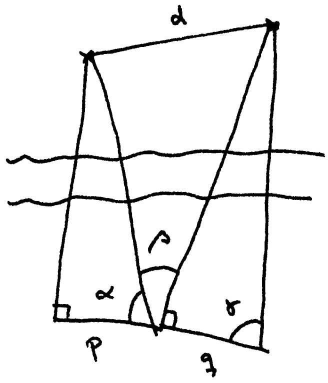
c) $a > c > a\operatorname{sen}\hat{C} \Rightarrow \hat{A} > \hat{C} \wedge 1 > \frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{c} \Rightarrow \hat{A} = \begin{cases}\hat{A}_1 \\ \hat{A}_2\end{cases}$ dos sol.

d) $a \leq c \Rightarrow \hat{A} \leq \hat{C} \wedge a\operatorname{sen}\hat{C} < c \Rightarrow \hat{A} \leq \hat{C} \wedge \frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{c} < 1 \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}_1$, una sol.

Ejemplos

Todos se basan en calcular $\hat{A}$ por el teorema del seno y elegir $\hat{A}_1$ o $\hat{A}_2$ según "a lado mayor se opone ángulo mayor"

Distancia entre dos puntos inaccesibles



$$m = \frac{p}{\cos\alpha} \; ; \quad n = q \operatorname{tg}\alpha$$

$$d = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\beta}$$

TR - P

Identidades sencillas

$$\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\cos\alpha \cdot \sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$$

$$(\sec^2\alpha - 1)\cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\frac{\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} = 1$$

$$\frac{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg} - 1}$$

$$\frac{1}{1 - \operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\alpha} = 2\sec^2\alpha$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cos^4\alpha} \cdot \frac{1}{\sec^2\alpha}$$

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$$

TR – P

Identidades interesantes

$$\operatorname{sen}\beta \cos(\alpha-\beta) + \cos\beta \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$$

$$2 - \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} + 3\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 0$$

$$\cos^6\alpha + \operatorname{sen}^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2\alpha$$

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$$

$$2(\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha)^2 = \operatorname{sen}^8\alpha + \cos^8\alpha + 1$$

$$\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha$$

$$\left(\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2} + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\operatorname{sen}^2\alpha\,(1+\cos\alpha)$$

$$\frac{1-\operatorname{sen}2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{tg}2x}{1+\sec 2x} - \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x\cos y} = \operatorname{tg}y$$

$$\left(\frac{1}{\cos x - \cos^2 x} - \frac{1}{\cos x + \cos^2 x}\right)\frac{1}{\sec^2 x} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x + \operatorname{sen}x}{\cos x - \operatorname{sen}x} - \frac{\cos x - \operatorname{sen}x}{\cos x + \operatorname{sen}x}\right)\operatorname{ctg}2x =$$

Identidades en triángulos

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}$$

$$a = b \cdot \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}(\hat{A}+\hat{C})}$$

Fórmulas de Mollweide

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} \quad ; \quad \frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$\widehat{ABC}$ rectángulo $\Leftrightarrow$ $\operatorname{sen}^2\hat{A} = \operatorname{sen}^2\hat{B} + \operatorname{sen}^2\hat{C}$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}\gamma = 0$$

$$\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma}{2\cos\alpha}$$

TR – P

Ecuaciones trigonométricas

$$2\,\text{sen}\,x = 2 - \cos^2\alpha$$

$$2\,\text{sen}\,\frac{x}{2} + \cos x = \frac{3}{2}$$

$$6\,\text{sen}\,x\,\text{tg}\,x = \text{sen}\,2x$$

$$3\sec x + 4\,\text{cosec}\,x = 10\,\text{cosec}\,2x$$

$$2\,\text{sen}\,x + 3\cos x = 2$$

$$\text{sen}^2 2x + 2\cos^2 x - 2 = 0$$

$$2\,\text{tg}\,x + \sec^2 x = 2$$

$$\frac{1}{\cos x} = \text{sen}\,x + \cos x$$

$$3\,\text{tg}^2 x = 2\sec x + 1$$

$$1 + \cos x + \cos 2x = 0$$

$$\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x = \cos x - \cos 3x$$

$$3\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$$

$$\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x = \cos x + \cos 3x$$ (divide por $\cos^3 x$)

$$\text{tg}\,2x = 3\,\text{tg}\,x$$

$$\text{sen}\,x + \text{cosec}\,x = \frac{5}{2}$$

$$2\cos 2x + \text{sen}\,x = 2$$

$$5\sec x - 4\cos x = 8$$

$$\text{sen}\,x = \cos x$$

$$4\,\text{sen}\,x - \cos x = 2$$

$$\cos x - \frac{2\,\text{tg}\,x}{1 + \text{tg}^2 x} = 0$$

$$\text{tg}\,x = 2\sec^2 x - 5$$

$$\cos 2x + \text{sen}\,x = 0$$

$$\frac{\text{tg}\,2x}{\text{sen}\,x} + 2 = 0$$

$$\cos 4x - \text{sen}\,2x = 0$$

Tercero de B.U.P.

Examen de segunda evaluación (para elevar calificación)

Fecha: X.21.12.1983

Tema: "Trigonometría y sus aplicaciones".

1. Demostrar que $\dfrac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{3\,\mathrm{sen}\,\alpha-\mathrm{sen}\,3\alpha} = \mathrm{ctg}^3\alpha$

2. Disponiendo de un teodolito y un medidor de distancias, diseñar un método para calcular la distancia entre dos puntos de la ladera de una montaña inaccesible (ver figura 1).

3. Lo mismo que el problema anterior para calcular la superficie - de un triángulo definido por tres puntos inaccesibles. (ver figura 2).

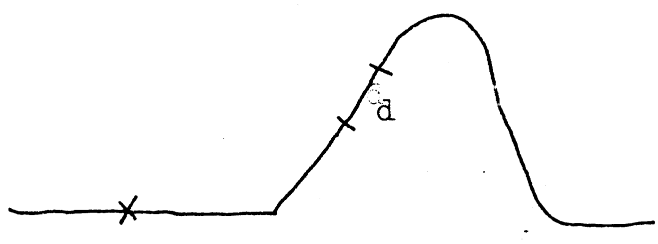


figura 1

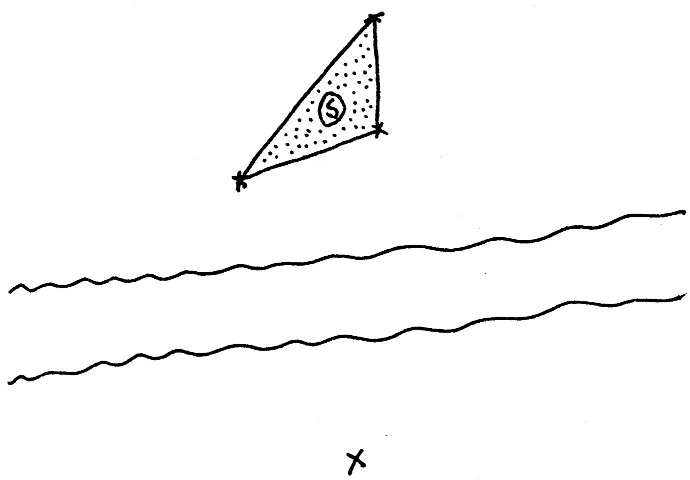


figura 2

Tercero B

Fecha: V. 13.12.1985

Tiempo: 50' + 2' para mirar apuntes

1. Teorema del coseno

2. Demostrar que $2 - \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} + 3\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

3. Resolver la ecuación $4\cos x = 1 + 4\cos^2 x$

4. De un triángulo $\widehat{ABC}$ se sabe que $a = 3$, $\hat{B} = 50°$, $\hat{C} = 70°$.

   Resolverlo y calcular su área

Para subir calificación

1. Si $\mathrm{sen}\,x = p$, ¿cuánto vale $\mathrm{sen}\,4x$?

2. Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo. Demostrar que $\mathrm{tg}\,\hat{A} + \mathrm{tg}\,\hat{B} + \mathrm{tg}\,\hat{C} = \mathrm{tg}\,\hat{A}\cdot\mathrm{tg}\,\hat{B}\cdot\mathrm{tg}\,\hat{C}$

Tercero C

Fecha: V. 13.12.1985 Tiempo: 50' + 2' para mirar apuntes

1. Teorema del coseno
2. Demostrar que $2 \operatorname{sen}^2 \frac{3\alpha}{2} = 1 - \cos^3\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$
3. Resolver la ecuación $4\cos(x-2) = 1 + 4\cos^2(x-2)$
4. De un triángulo $\widehat{ABC}$ se sabe que $a = 5$, $\hat{B} = 65°$, $\hat{C} = 40°$.

   Resolverlo y calcular su área.

Para subir calificación

1. Si $\cos x = p$, ¿cuánto vale $\cos 4x$?
2. Encontrar todas las soluciones de $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$

Fecha: V. 23. 10. 1987 ; Tiempo: 1 hora

① Usando las fórmulas del ángulo mitad y del ángulo triple, calcular con 6 decimales $\operatorname{sen} \frac{3\alpha}{2}$, sabiendo que $\cos \alpha = -0.6$ y $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

② Demostrar la identidad $\dfrac{1 - \operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

③ Resolver la ecuación $\cos x - \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$

④ Encontrar todos los ángulos $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ que verifican

$$3 \operatorname{sen} 4x + 2 \operatorname{tg} x = 5.12$$

[Dos puntos y medio cada pregunta]

Fecha: V. 23. 10. 1987 ; Tiempo: 1 hora

① Usando las fórmulas del ángulo mitad, calcular con seis decimales $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{4}$, sabiendo que $\cos \alpha = 0.4$ y $\alpha \in (\pi, 2\pi)$

② Demostrar la identidad $\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \sec 2x} - \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos x \cos y} = \operatorname{tg} y$

③ Resolver la ecuación $\dfrac{1}{\cos x} = \operatorname{sen} x + \cos x$

④ Encontrar todos los ángulos $x \in [0, 2\pi]$ que verifican

$$2 \operatorname{sen}(5x) + 3 \cos(3x) = -5.09$$

[Dos puntos y medio cada pregunta]

Matemáticas **Tercero de B.U.P.** **Curso 1991-92**

Hoja de problemas para rec. ***Parte A : Trigonometría*** **Fecha: L.16.12.1991**

Demuestra las identidades:

[1] $ctg^2a = \dfrac{\cos^2a}{\cos^2a - \cos^4a} \cdot \dfrac{1}{\sec^2a}$

[2] $\dfrac{sena}{2\cos^2(a/2)} - \dfrac{1-cosa}{sena} = 0$

[3] $[\ sen(3a/2) + sen(a/2)\ ]^2 = 2(sen^2a)(1+cosa)$

[4] $a + b + c = 180^o \Rightarrow tg(a+b) + tgc = 0$

Resuelve las ecuaciones:

[1] $(5/3)sen5x=-0.14$

[2] $tg(x/3)=4.5$

[3] $3ctg^22x=1$

[4] $tgx=2sec^2x-5$

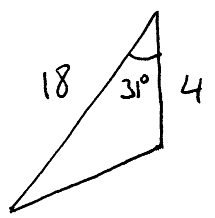
[5] $cos4x - sen2x = 0$

[6] $4senx - cosx = 2$

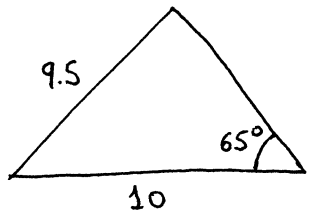
[7] $2cos2x + senx = 2$

Resuelve los triángulos:

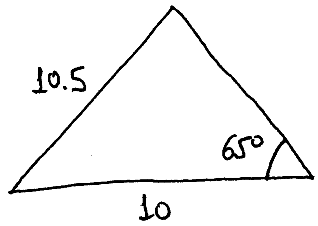
[1]



[2]



[3]



Matemáticas Tercero de B.U.P. Curso 1991-92

Resolución de problemas de rec. ***Parte A : Trigonometría*** **Fecha: J.9.1.1992**

Identidades

(1)

$$\frac{\cos^2 a}{\cos^2 a - \cos^4 a} \cdot \frac{1}{\sec^2 a} = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a(1-\cos^2 a)} \cdot \cos^2 a = \frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a} = \operatorname{ctg}^2 a$$

(2)

$$\frac{\operatorname{sen} a}{2\cos^2 \frac{a}{2}} - \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} a}{2\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\right)^2} - \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} a}{1+\cos a} - \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 a - (1+\cos a)(1-\cos a)}{(1+\cos a)\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen}^2 - 1 + \cos^2 a}{(1+\cos a)\operatorname{sen} a} = \frac{0}{(1+\cos a)\operatorname{sen} a} = 0$$

(3)

$$\left(\operatorname{sen}\frac{3a}{2} + \operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)^2 = \left(2\operatorname{sen}\frac{\frac{3a}{2}+\frac{a}{2}}{2}\cos\frac{\frac{3a}{2}-\frac{a}{2}}{2}\right)^2 = \left(2\operatorname{sen} a\cos\frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$= 4\operatorname{sen}^2 a\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\right)^2 = 4\operatorname{sen}^2 a\,\frac{1+\cos a}{2} = 2\operatorname{sen}^2 a(1+\cos a)$$

(4)

$$a+b+c = 180^\circ \Rightarrow a+b = 180^\circ - c$$

$$\operatorname{tg}(a+b) + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg}(180^\circ - c) + \operatorname{tg} c = -\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c = 0$$

Matemáticas Tercero de B.U.P. Curso 1991-92

Resolución de problemas de rec. *Parte A : Trigonometría* **Fecha: J.9.1.1992**

Ecuaciones

① $\frac{5}{3}\operatorname{sen}5x = -0.14 \Rightarrow \operatorname{sen}5x = \frac{-3\cdot 0.14}{5} \Rightarrow 5x = \begin{cases} -4.82^\circ + K360^\circ \\ 184.82^\circ + K360^\circ \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} -0^\circ\ 57'\ 49'' + K\cdot 72^\circ \\ 36^\circ\ 57'\ 49'' + K\,72^\circ \end{cases}$

② $tg\frac{x}{3} = 4.5 \Rightarrow \frac{x}{3} = 77.47^\circ + K\,180^\circ \Rightarrow x = 232^\circ\ 24'\ 49'' + K\cdot 540^\circ$

③ $3ctg^2 2x = 1 \Rightarrow ctg^2 2x = \frac{1}{3} \Rightarrow tg^2 2x = 3 \Rightarrow tg\,2x = \begin{cases} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 60^\circ + K180^\circ \\ -60^\circ + K\,180^\circ \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + K\cdot 90^\circ \\ -30^\circ + K\cdot 90^\circ \end{cases}$

④ $tg\,x = 2\sec^2 x - 5 \Rightarrow tg\,x = 2(1 + tg^2 x) - 5 \xRightarrow{tg\,x = p} p = 2(1+p^2) - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 2 + 2p^2 - 5 \Rightarrow 2p^2 - p - 3 = 0 \Rightarrow p = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \begin{cases} 1.5 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow tg\,x = \begin{cases} 1.5 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 56^\circ\ 18'\ 36'' + K\,180^\circ \\ -45^\circ\ 0'\ 0'' + K\,180^\circ \end{cases}$

⑤ $\cos 4x - \operatorname{sen}2x = 0 \Rightarrow \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{sen}2x = 0 \xRightarrow{\operatorname{sen}2x = p} 1 - p^2 - p^2 - p = 0 \Rightarrow 2p^2 + p - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ 0.5 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}2x = \begin{cases} -1 \\ 0.5 \end{cases} \Rightarrow 2x = \begin{cases} -90^\circ + K360^\circ \\ 30^\circ + K\,360^\circ \\ 150^\circ + K360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -45^\circ + K\,180^\circ \\ 15^\circ + K180^\circ \\ 75^\circ + K180^\circ \end{cases} = 15^\circ + K60^\circ$

⑥ $4\operatorname{sen}x - \cos x = 2 \xRightarrow{tg\frac{x}{2} = t} 4\cdot\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \Rightarrow 8t - 1 + t^2 = 2 + 2t^2 \Rightarrow t^2 - 8t + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 4 \pm \sqrt{16-3} = \begin{cases} 4+\sqrt{13} \\ 4-\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow tg\frac{x}{2} = \begin{cases} 4+\sqrt{13} \\ 4-\sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} 82.51^\circ + K180^\circ \\ 21.53^\circ + K180^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 165^\circ\ 1'\ 9'' + K360^\circ \\ 43^\circ\ 3'\ 12'' + K360^\circ \end{cases}$

⑦ $2\cos 2x + \operatorname{sen}x = 2 \Rightarrow 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen}x = 2 \xRightarrow{\operatorname{sen}x = p} 2(1 - p^2 - p^2) + p = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - 4p^2 + p = 2 \Rightarrow 4p^2 - p = 0 \Rightarrow p = \begin{cases} 0 \\ 0.25 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}x = \begin{cases} 0 \\ 0.25 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} K360^\circ \\ 180^\circ + K360^\circ \\ 14^\circ\ 28'\ 39'' + K360^\circ \\ 165^\circ\ 31'\ 21'' + K360^\circ \end{cases} \Rightarrow$

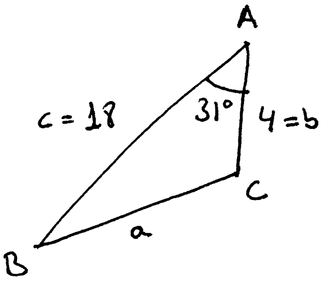
$\Rightarrow x = \begin{cases} K180^\circ \\ 14^\circ\ 28'\ 39'' + K360^\circ \\ 165^\circ\ 31'\ 21'' + K360^\circ \end{cases}$

Matemáticas **Tercero de B.U.P.** **Curso 1991-92**

Resolución de problemas de rec. *Parte A : Trigonometría* Fecha: J.9.1.1992

Triángulos

(1)



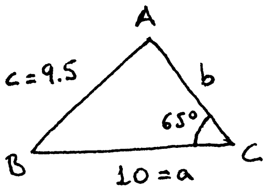
$$a = \sqrt{4^2 + 18^2 - 2 \cdot 4 \cdot 18 \cdot \cos 31^\circ} = 14.72$$

$$\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - 31^\circ}{2} = 74.5^\circ$$

$$\frac{c+b}{c-b} = \frac{tg\,\frac{\hat{C}+\hat{B}}{2}}{tg\,\frac{\hat{C}-\hat{B}}{2}} \Rightarrow \frac{22}{14} = \frac{tg\,74.5^\circ}{tg\,\frac{\hat{C}-\hat{B}}{2}} \Rightarrow tg\,\frac{\hat{C}-\hat{B}}{2} = \frac{14\,tg\,74.5^\circ}{22} \Rightarrow \hat{C}-\hat{B} = 66.45^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\hat{C}+\hat{B}}{2} = 74.5^\circ \\ \frac{\hat{C}-\hat{B}}{2} = 66.45^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{B} = 8^\circ\ 2'\ 51'' \\ \hat{C} = 140^\circ\ 57'\ 9'' \end{array}\right.$$

(2)



$$\frac{10}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{9.5}{\text{sen}\,65^\circ} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \frac{10\,\text{sen}\,65^\circ}{9.5} \Rightarrow \hat{A} = \left\{\begin{array}{l} 72^\circ\ 33'\ 20'' \\ 107^\circ\ 26'\ 40'' \end{array}\right.$$

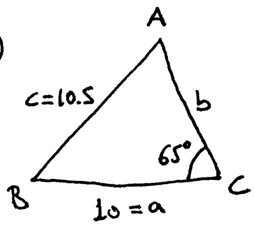
$10 > 9.5 \Rightarrow a > c \Rightarrow \hat{A} > \hat{C} \Rightarrow \hat{A} > 65^\circ \Rightarrow$ Hay dos soluciones:

$$\hat{A}_1 = 72^\circ\ 33'\ 20'' \quad ; \quad \hat{A}_2 = 107^\circ\ 26'\ 40''$$

$$\hat{B}_1 = 180^\circ - (65^\circ + 72^\circ\ 33'\ 20'') = 42^\circ\ 26'\ 40'' \quad ; \quad \hat{B}_2 = 180^\circ - (65^\circ + 107^\circ\ 26'\ 40'') = 7^\circ\ 33'\ 20''$$

$$b_1 = \sqrt{10^2 + 9.5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 9.5 \cos 42^\circ 26' 40''} = 7.07 \quad ; \quad b_2 = \sqrt{10^2 + 9.5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 9.5 \cos 7^\circ 33' 40''} = 1.38$$

(3)



$$\frac{10}{\text{Sen}\,\hat{A}} = \frac{10.5}{\text{Sen}\,65^\circ} \Rightarrow \text{Sen}\,\hat{A} = \frac{10\,\text{sen}\,65^\circ}{10.5} \Rightarrow \hat{A} = \left\{\begin{array}{l} 59^\circ\ 40'\ 20'' \\ 120^\circ\ 19'\ 40'' \end{array}\right.$$

$10 < 10.5 \Rightarrow a < c \Rightarrow \hat{A} < \hat{C} \Rightarrow \hat{A} < 65^\circ \Rightarrow$ Hay sólo una solución.

$$\hat{A} = 59^\circ\ 40'\ 20''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (65^\circ + 59^\circ\ 40'\ 20'') = 55^\circ\ 19'\ 40''$$

$$b = \sqrt{10^2 + 10.5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10.5 \cos 55^\circ 19' 40''} = 9.53$$

Números complejos

Introducción

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$ Comprobarlo

$\frac{1}{2} x^2 - \sqrt{3}\, x + 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{3} + \sqrt{-1} \\ \sqrt{3} - \sqrt{-1} \end{cases}$ " comprobarlo "

Si pudiéramos operar con $\sqrt{-1}$, podríamos resolver cualquier ecuación de segundo grado, p. ej.: $x^2 - 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 + 3\sqrt{-1} \\ 1 - 3\sqrt{-1} \end{cases}$

Por tanto, nos interesa dar un sentido a estos números de la forma $a + b\sqrt{-1}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

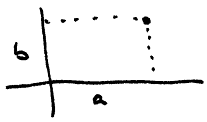
Definición de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \{ (a,b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

Si $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, se llama parte real de z a "a" y parte imaginaria a "b". Se escribe: $Re(z) = a$; $Im(z) = b$

Representación gráfica

Sea $z \in (a,b) \in \mathbb{C}$



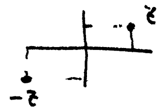
El punto del plano que representa al número complejo z se llama afijo de z

(a,b) es representación (forma) cartesiana (canónica) de z

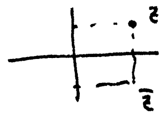
(Hablar de los 4 cuadrantes)

Opuesto y conjugado

Si $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, Opuesto de $z = -z = (-a, -b)$



Conjugado de $z = \overline{z} = (a, -b)$



Suma de n.c.

(E) ¿Cómo sumaríamos $a+b\sqrt{-1}$ y $c+d\sqrt{-1}$?

Se define $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

Producto de un n. real y un n.c.

(E) ¿ $\alpha(a+b\sqrt{-1})$?

$\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$

Definición

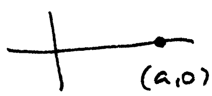
$i = (0,1)$

Número imaginario puro es el que tiene parte real 0

$(0,b) = b(0,1) = bi$

Identificación

$\forall a \in \mathbb{R}$ identificamos a y $(a,0)$



, es decir convenimos que $a = (a,0)$, luego $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Consecuencia

$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + b(0,1) = a+bi$, que se llama

representación (forma) binómica de z

Suma ...

$\alpha(a+bi)$ ...

$\overline{a+bi}$ ....

$-(a+bi)$ ....

Producto de n.c.

(E) ¿ $(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})$?

$(a,b)(c,d) = (ac-bd\ ,\ ab+bc)$ (Definición)

$(a+bi)(c+di) =$ .... (lo más cómodo)

Teorema

$i^2 = -1$ (E) Es como si $i = \sqrt{-1}$, luego $a+b\sqrt{-1} = a+bi$

Demostración

$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$

Potencias de i

$i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^{4n+m} = i^m$

NC4

Cociente de n.c.

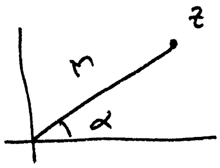
Para calcular $\frac{a+bi}{c+di}$ basta multiplicar num. y denominador por el conjugado del denominador.

Potencia de un n.c.

$(a+bi)^n$ se calcula por el binomio de Newton

Forma polar

Sea $z \in \mathbb{C}$



$z = M_\alpha$

M : módulo

α : argumento

También se llama forma (repr.) módulo-argumental.

$\bar{z} = M_{-\alpha}$; $-z = M_{\alpha+\pi}$

Argumentos de un número complejo

Paso polar - cartesiana

1. $z = M_\alpha \Rightarrow a = M\cos\alpha \wedge b = M \operatorname{sen}\alpha$

2. $z = (a,b)$; $M = \sqrt{a^2+b^2}$, $tg\,\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} arctg\,\frac{b}{a} \\ \pi + arctg\,\frac{b}{a} \end{cases}$

   se decide según el cuadrante de z

$\boxed{\text{Calculadora}}$

Casos particulares

Los números reales y los imaginarios puros deben ser convertidos directamente (visualmente)

NCS

Forma trigonométrica

$$z = (a,b) = r_\alpha \in \mathbb{C}$$

$$a+bi = r\cos\alpha + r\,\text{sen}\,\alpha\, i = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

Paso trigonométrica – binómica

1. $r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) = \dots$ operar
2. $a+bi \rightarrow r_\alpha \rightarrow \dots$ automático

Producto en forma polar

$$M_\alpha, N_\beta \in \mathbb{C}$$

$$M_\alpha \cdot N_\beta = M(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)\,N(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) = \dots$$

$$\dots = MN(\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)) = MN_{\alpha+\beta}$$

Cociente en forma polar

$$M_\alpha, N_\beta \in \mathbb{C}$$

$$\frac{M_\alpha}{N_\beta} = X_\sigma \Rightarrow M_\alpha = X_\sigma \cdot N_\beta = XN_{\sigma+\beta} \Rightarrow \begin{cases} M = XN \\ \alpha = \sigma + \beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \frac{M}{N} \\ \sigma = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \frac{M_\alpha}{N_\beta} = \left(\frac{M}{N}\right)_{\alpha-\beta}$$

Potencia en forma polar

Pedir a ellos $(r_\alpha)^3$, $(r_\alpha)^3$

$(r_\alpha)^n = \dots = r^n_{n\alpha}$, fórmula de Moivre

Abraham de Moivre, Francia 1667 - 1754

$$(r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha))^n = r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$$

Aplicación práctica

Haciendo $r = 1$, deducir las fórmulas de $\operatorname{sen} n\alpha$ y $\cos n\alpha$ en función de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$

Argumentos de un número complejo [Adelantado]

Si $z = r_\alpha \in \mathbb{C}$, α es un argumento de z, pero también lo es $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, luego z tiene infinitos argumentos, que se designan $\arg(z)$

Sólo hay uno en el intervalo $[0, 2\pi)$, que se llama argumento principal y se designa $\operatorname{Arg}(z)$, luego

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

traslación

Interpretación geométrica [SUPRIMIBLE]

Suma de complejos $\longrightarrow$ traslación

Producto real por complejo $\longrightarrow$ homotecia

" complejo por complejo $\longrightarrow$ giro o giro con homotecia

Raices de un número complejo

Siempre se calculan en forma polar

Poner un ejemplo

Que hagan otro como ejercicio

$$\sqrt[n]{M_\alpha} = X_\sigma \Rightarrow M_\alpha = (X_\sigma)^n = X^n_{n\sigma} \Rightarrow \begin{cases} M = X^n \\ \alpha = n\sigma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \sqrt[n]{M} \\ \sigma = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \sqrt[n]{M} \\ \sigma = \dfrac{\alpha}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{M_\alpha} = \sqrt[n]{M}_{\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}}$$

Ecuaciones

Proponer ec. con n.c.

Fecha: M. 12.1.1988

1. Potencia de n.c.

2. $(3-i)^5 + 3_{130^\circ} \cdot 2_{50^\circ} + \frac{25+8i}{3+2i}$

3. $i^{120}\left(\sqrt{2}_{135^\circ} + \sqrt{2}_{225^\circ}\right)^2 - (2i^2)^2$

4. $\sqrt[7]{1_{140^\circ}}$

5. Resolver $z^2 - (2+2i)z + 3 - 2i = 0$

1. Cociente de números complejos

2. $i^{13} + (3-i)(2+2i) + \frac{-9+7i}{3+2i}$

3. $\frac{(5_{20^\circ})^3}{(5_{10^\circ})^2 (2_{25^\circ})^4} \cdot (-8)$

4. $\sqrt[6]{64_{30^\circ}}$

5. Resolver $z^2 - (11+3i)z + (38+27i) = 0$

Para elevar calificación

1. El producto de dos núm complejos es $2i$ y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es $\frac{1}{2}$. Hallarlos

2. Resolver $z^3 - iz^2 - 2iz - 2 = 0$

Matemáticas **Tercero de B.U.P.** **Curso 1991-92**

Hoja de problemas. ***Parte B : Números complejos*** **Fecha: J.9.1.1992**

[1] Siendo $z=1-4i$, $t=(-4,5)$, $u=3_{90^\circ}$, $v=-14-3i$, $x=4_{180^\circ}$, realiza las siguientes operaciones en forma binómica:

a) $(v/t) + 4u - z^2$ b) $i^{117}+(-i)^{45}-zv+x$ c) $\overline{v}+3\overline{x}$

[2] Siendo $z=5_{140^\circ}$, $t=25(\cos 75^\circ+i\,\mathrm{sen}\,75^\circ)$, $u=i$, $v=125_{80^\circ}$, $x=-1/5$, realiza las siguientes operaciones en forma polar:

a) t^3v^5/z^7 b) $z^3\overline{u}(-v)$ c) $tx/(zu)$ d) $(zxt)^4/(5v)$

[3] Siendo $z=5_{14^\circ}$, $t=2(\cos 55^\circ+i\,\mathrm{sen}\,55^\circ)$, $u=6i$, $v=12+5i$, $x=(-5,2)$ realiza las siguientes operaciones en la forma que consideres más adecuada:

a) $z+t$ b) x^{13} c) $u^2+3\overline{v}$ d) $(-t)^3$ e) $|v|+\mathrm{Arg}(z)$ ($||$ -> módulo)

[4] Calcula las siguientes raíces expresando los resultados en forma polar:

a) $\sqrt[5]{7776_{55^\circ}}$ b) $\sqrt{5-12i}$ c) $\sqrt[3]{27_{210^\circ}}$ d) $\sqrt[4]{625}$

[5] Calcula las siguientes raíces expresando los resultados en forma binómica; representa gráficamente los afijos de las soluciones.

a) $\sqrt[4]{-625}$ b) $\sqrt[6]{1_{60^\circ}}$ c) $\sqrt[3]{i}$

Matemáticas Tercero de B.U.P., grupo A. Curso 1991-92

Examen de recuperación de la Parte B: *Números complejos* **Fecha: J.20.2.1992**

[1] Cociente de números complejos.

[2] Siendo $z=4-3i$, $t=(1,-5)$, $u=3_{90^\circ}$, $v=12-8i$, $x=4_{180^\circ}$, realiza las siguientes operaciones en forma binómica:

a) $(v/t) - 3u + z^2$ b) $i^{25} + (-i)^{43} + zv - 3\overline{x}$

[3] Siendo $z=5_{20^\circ}$, $t=25(\cos 65^\circ + i\,\text{sen}\, 65^\circ)$, $u=-4i$, $v=(1/5)_{150^\circ}$, realiza las siguientes operaciones en forma polar:

a) z^3v^4/t^5 b) $z^3(-u)(\overline{v})$ c) $\sqrt[5]{v}$

[4] Siendo $z=5_{67^\circ}$, $t=2(\cos 18^\circ + i\,\text{sen}\, 18^\circ)$, $v=1+4i$,

realiza las siguientes operaciones en la forma que consideres más adecuada; da el resultado en la forma que se pida:

a) $z+t$ Resultado en polar. b) v^6 Resultado en binómica.

<u>Valor de las preguntas:</u> 1: *tres puntos*; resto: *un punto cada apartado*

Matemáticas Tercero de B.U.P., grupo A. Curso 1991-92

Examen de subir nota de la Parte B: *Números complejos* **Fecha: J.20.2.1992**

[1] Demuestra que si *a* es un número real y *z* un número complejo,

$$-\overline{z} = \overline{-z}$$

[2] Los números complejos permiten resolver cualquier ecuación de segundo grado, siempre que éstos se admitan como solución. Resuelve ésta:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

[3] También es posible que en el planteamiento de una ecuación aparezcan los números complejos. En estos casos es costumbre llamar *z* a la incógnita, que en principio puede ser cualquier número complejo. Resuelve ésta:

$$(4+3i)z + 5i = 3$$

[4] Pero el caso más difícil es cuando la ecuación tiene varias soluciones. Busca todas las soluciones de esta ecuación:

$$(z^2+i)^2 = 1$$

Geometría

1. Vectores

Ⓔ Diferencia entre magnitudes escalares y vectoriales

Definición de $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R} \to$ conj. de los núm. reales

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ \underset{\text{par}}{(x,y)} \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \} = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$ (El plano)

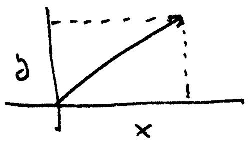
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \{ ((x,y),z) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge z \in \mathbb{R} \} = \{ \underset{\text{terna}}{(x,y,z)} \mid x,y,z \in \mathbb{R} \}$.
(El espacio)

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \{ \underset{\text{enuple}}{(x_1, \dots, x_n)} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$. (Espacio n-dimensional)

Vamos a estudiar geométricamente $\mathbb{R}^2$; a sus elementos los llamaremos vectores

Representación gráfica

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

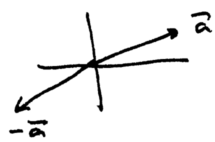


Se suele escribir $\vec{v} = (x,y)$

Definiciones

1. Vector nulo o vector cero : $\vec{0} = (0,0)$

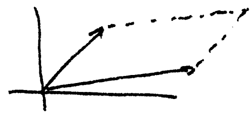
2. Vector opuesto de $\vec{a} = (x,y)$: $-\vec{a} = (-x,-y)$



Suma de vectores

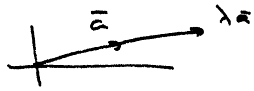
Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, definimos $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

Gráficamente es la regla del paralelogramo



Producto de un escalar y un vector

Si $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$



Proporcionalidad de vectores

Dos vectores $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ se dice que son proporcionales o múltiplos

cuando $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{a} = \lambda \vec{b}$

¿Cómo saber rápidamente si (a,b) y (x,y) lo son?

Si $a = 0$, debe ser $x = 0$

Si $b = 0$, debe ser $y = 0$

Si $a \neq 0 \neq b$, debe ser $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

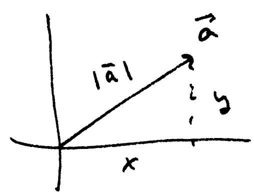
Producto escalar

Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, se define

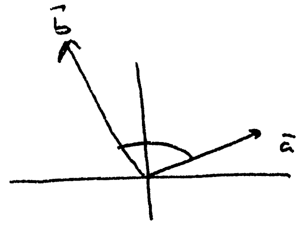
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_1$$

Módulo de un vector

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad ; \quad |\vec{a}| = |(x,y)| = \sqrt{(x,y) \cdot (x,y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Ángulo entre dos vectores

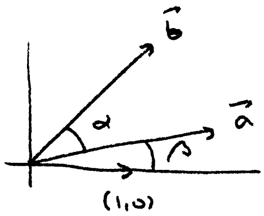


Si $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, forman un ángulo que se escribe $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ o $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ y siempre se toma en el intervalo $[0, \pi]$

Proposición

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$. Entonces $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

Demostración



Llamemos $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, $\beta = (\widehat{\vec{a}, (1,0)})$

$$\cos \alpha = \cos((\alpha+\beta)-\beta) = \cos(\alpha+\beta)\cos\beta + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\beta =$$

$$= \frac{b_1}{|\vec{b}|} \cdot \frac{a_1}{|\vec{a}|} + \frac{b_2}{|\vec{b}|} \cdot \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Definición de ortogonalidad

Dos vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$ se dice que son ortogonales o perpendiculares cuando $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, y se escribe $\vec{a} \perp \vec{b}$

Evidentemente $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$

GM4

Problema práctico

Dado un vector hallar rápidamente otro cualquiera perpendicular a él

Si nos dan (a,b), buscamos (x,y) de modo que

$(a,b)\,(x,y) = 0 \Rightarrow ax + by = 0$. Podemos tomar $x = b$, $y = -a$
$x = -b$, $y = a$

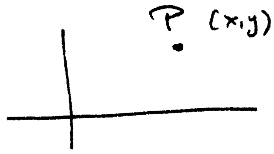
$(a,b) \longrightarrow (b, -a)$ y cualquier vector proporcional a $(b,-a)$

nos vale, ya que

$$(a,b) \cdot (\lambda(-b,a)) = \dots = 0$$

2. Puntos

Ahora vamos a considerar $\mathbb{R}^2$ también como el conjunto de puntos del plano: $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$



Utilizaremos simultáneamente las dos interpretaciones de $\mathbb{R}^2$: como conjunto de puntos y como conjunto de vectores.

Los puntos los denotaremos con letras mayúsculas y los vectores con minúsculas con flechas

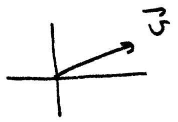
Suma de punto y vector

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

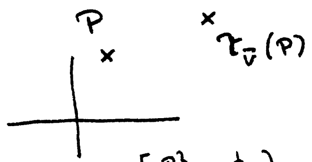
Definimos la "Traslación de vector $\vec{v}$": $\tau_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$P=(p_1,p_2) \longrightarrow (p_1+v_1 \,,\, p_2+v_2)$$

Gráficamente



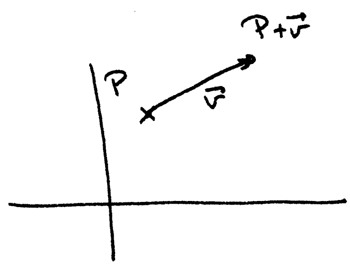
[$\mathbb{R}^2$ vectores]



[$\mathbb{R}^2$ puntos]

Se suele escribir $P+\vec{v}$ en vez de $\tau_{\vec{v}}(P)$, así que el resultado práctico es:

$$\left.\begin{array}{l} P = (p_1, p_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{array}\right\} \Rightarrow P+\vec{v} = (p_1+v_1 \,,\, p_2+v_2)$$

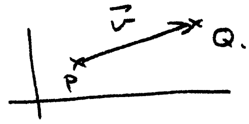


[$\mathbb{R}^2$ mogollón]

GM6

Proposición

$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2 \; \exists! \, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid Q = P + \vec{v}$



Demostración

$P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$. Hipotético $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$Q = P + \vec{v} \Rightarrow (q_1, q_2) = (p_1, p_2) + (v_1, v_2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (v_1, v_2) =$

$= (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$, que efectivamente existe y es único.

Vector que une dos puntos

Dados $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ se define

"Vector que une P y Q" $= \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$

[Coordenadas del extremo menos coordenadas del origen]

Propiedades

1. $A + \overrightarrow{AB} = B$
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(Demostrar sólo visualmente)

Distancia entre dos puntos

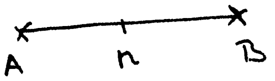
$d(R, S) = |\overrightarrow{RS}|$, luego $d((r_1, r_2), (s_1, s_2)) = \sqrt{(s_1 - r_1)^2 + (s_2 - r_2)^2}$

Ejercicios

a) Encontrar vértices de figuras

b) Clasificar triángulos

Punto medio de un segmento



$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2} \right)$$

Ejercicios

a) Puntos que dividen un segmento en un número de partes especificado

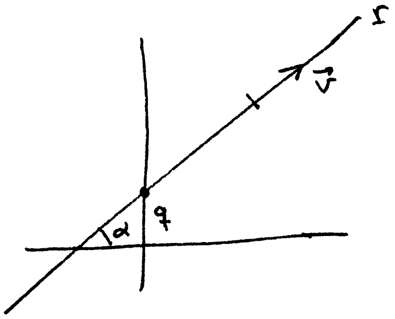
b) Longitud de medianas

c) Baricentro de un triángulo

etc...

3. Rectas

Conceptos básicos



Sea r una recta.

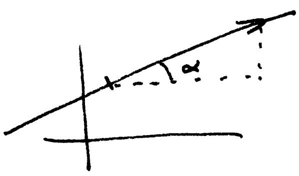
Pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje positivo de abscisas : $m = tg\,\alpha$

Ordenada en el origen es la ordenada del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas

Vector de dirección es cualquier vector que tenga la misma dirección que la recta. (Le llamaremos $\vec{v_r}$)

$A, B \in r \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ es v.d.

Cualquier múltiplo de un v.d. lo es también



Si (v_1, v_2) es v.d. , $m = \dfrac{v_2}{v_1}$

Ecuaciones de una recta

Dados un punto y una recta es necesario saber si el punto pertenece a la recta o no. Las ecuaciones de una recta son expresiones que permiten decidir la pertenencia o no del punto a la recta.

GM9

Sea r la recta que pasa por $H = (h_1, h_2)$ y tiene v.d. $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera

$P \in r \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid P = H + \lambda \vec{v}$, por lo que a

$P = H + \lambda \vec{v}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ se le llama ecuación vectorial

A veces se usan otras ecuaciones vectoriales, que son equivalentes:

$\overrightarrow{HP} = \lambda \vec{v}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \lambda \vec{v}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$P = H + \lambda \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x = h_1 + \lambda v_1 \\ y = h_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$ (Ecuaciones paramétricas)

Quitando el parámetro : $ax + by + c = 0$ (Ecuación implícita)

Despejando "y" : $y = mx + q$ (Ecuación explícita)

Ejemplo

a) Sacar las ec. a partir de H y $\vec{v}$

b) Decidir si puntos pertenecen o no

c) Obtener puntos a partir de la ec.

d) Encontrar el punto de corte de dos rectas

Casos particulares

a) Rectas paralelas al eje de abscisas.

$\vec{v} = (1, 0)$, $m = 0$

Si pasa por $H = (0, q)$, la ecuación es $y = q$

b) Rectas paralelas al eje de ordenadas

$\vec{v} = (0, 1)$, "$m = \infty$"

Si pasa por $H = (g, 0)$, la ec. es $x = g$

GM10

Vector perpendicular a una recta

Un vector es perpendicular a una recta cuando es perpendicular a sus v.d.

Sea $r \equiv ax+by+c=0$ una recta y $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2) \in r$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \in r \Rightarrow ax_1+by_1+c=0 \\ P_2 \in r \Rightarrow ax_2+by_2+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0 \Rightarrow (a,b) \perp \overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow (a,b) \perp$$

También se llama vector normal a r. Le llamaremos $\vec{n}_r$

Ejercicio

a) Dado un punto y v.d, hallar implícita

b) Dada la implícita, hallar v.d.

c) Dada r_{impl} y P, hallar la paralela y la perpendicular

Cálculo de la pendiente

1. Conocida la explícita. Es el coeficiente de "x"

2. Conocida la implícita, $ax+by+c=0$

   i) $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \Rightarrow m=-\frac{a}{b}$

   ii) $(a,b) \perp r \Rightarrow (b,-a)$ v.d. $\Rightarrow m=-\frac{a}{b}$.

3. Conocidas las paramétricas

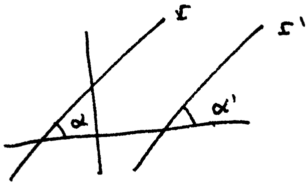
4. Conocidos dos puntos

Ejercicio

a) Dados dos puntos, hallar la explícita

Paralelismo entre rectas

Dos rectas son paralelas cuando lo son sus vectores de dirección, e.d., cuando son proporcionales



$\alpha = \alpha' \Rightarrow m = m'$

Perpendicularidad entre rectas

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus v. d.

$r \perp s \iff \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \quad [\iff \vec{n}_r \perp \vec{n}_s]$

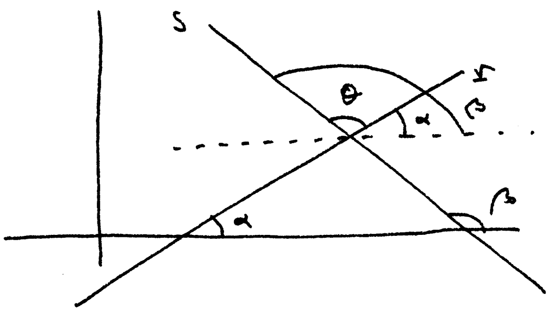
$$r \perp r' \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (v_1, v_2) \\ \vec{v}_{r'} = (v_2, -v_1) \end{cases} \Rightarrow m_r \cdot m_{r'} = \frac{v_2}{v_1}\left(-\frac{v_1}{v_2}\right) = -1$$

Ejercicio

Dada r (expl.) y P, hallar la paralela y la perpendicular

Ángulo entre dos rectas

Se define como $\measuredangle(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$ y coincide con $\measuredangle(\vec{n}_r, \vec{n}_s)$



2. $\theta = \beta - \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \dfrac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}$

1. $\theta = \beta - \alpha \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} m_s - \operatorname{arctg} m_r$

En principio $\measuredangle(r, s) = \measuredangle(s, r)$, pero a veces es necesario distinguir el signo. Las fórmulas 1 y 2 lo hacen, pero la definición no

GM 12

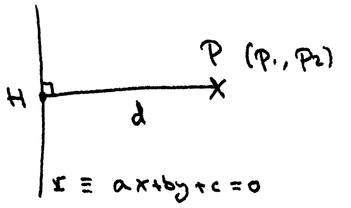
Ejercicios

a) Calcular ángulo entre dos rectas

b) Dada r, θ, P, hallar otra recta s que pase por P y forme ángulo θ

c) Dem. condición de paralelismo y perpendicularidad.

Distancia de un punto a una recta



$$d = d(P,H)$$

$$(a,b) \perp r \Rightarrow (a,b) \text{ v.d. de } r(P,H)$$

$$H \in r(P,H) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid H = P + \lambda(a,b)$$

Luego $H = (p_1,p_2) + \lambda(a,b) = (p_1+\lambda a, p_2+\lambda b)$

$$H \in r \Rightarrow a(ap_1+\lambda a) + b(p_2+\lambda b) + c = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{ap_1+bp_2+c}{a^2+b^2}$$

$$d(P,H) = \sqrt{(\lambda a)^2+(\lambda b)^2} = |\lambda|\sqrt{a^2+b^2}$$

$$d = \left| -\frac{ap_1+bp_2+c}{a^2+b^2} \right| \sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

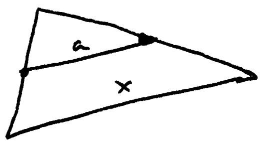
Ejercicio

Hallar la bisectriz de un ángulo

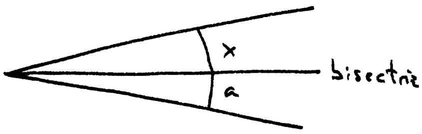
GM - P

Geometría clásica

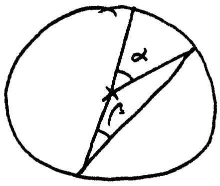
Al unir los puntos medios de un cuadrilátero, se obtiene un paral.



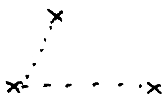
$x = 2a$



$x = a$

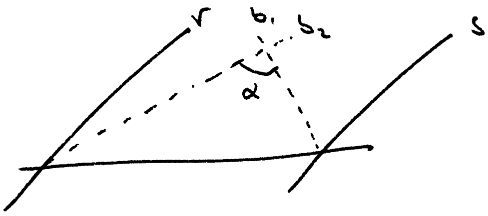


$\alpha = 2\beta$



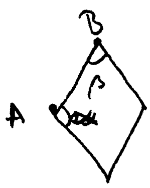
Hallar el cuarto vértice del paralelogramo

Dividir un segmento en n partes



$r \parallel s \wedge b_1 \wedge b_2$ bisectrices

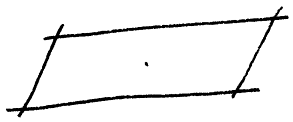
$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$



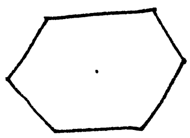
Rombo | $\alpha = 2\beta$. Dados A y B, dibujar el rombo

GM - P

Puntos y vectores

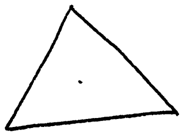


Distintos datos

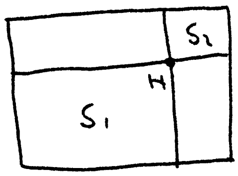


Dados 3 vértices consecutivos, hallar el resto

(calculado el centro o no)



$A \wedge G \Rightarrow B \wedge C$ (equilátero)



$S_1 = 4 S_2$. Hallar H

GM - P

Generales

Tremenda pasada triangular

Dada una ecuación, hallar puntos, vect. directores y normales.

Ecuación normal o canónica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Hallar k sabiendo que $(-3,1)$, $(k,k+1)$ y $(9,4)$ están alineados

Perímetro y área de un triángulo conocidas las ec. de los lados

El incentro del $\triangle$ de vértices $(-1,2)$, $(11,-7)$ y $(23,9)$ es $(10,0)$

GM-P

Interesantes

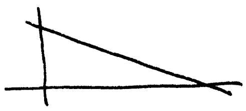
A, B, r. Hallar $P \in r$ tal que

a) $\vec{AP} \perp \vec{BP}$

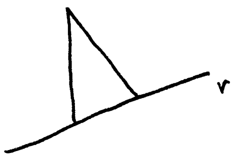
b) $\widehat{ABP}$ isósceles

c) $\widehat{ABP}$ equilátero

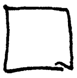
A, B. Hallar $C \in \mathbb{R}^2$ | $\widehat{ABC}$ equilátero



Áreas y puntos



Dados A y B (cualesquiera) y r. Isósceles
Hallar C



Un vértice y una diagonal conocida. Hallar los demás vértices

isósceles. Lado desigual, un vértice, superficie. Hallar vértices

Vértices de un cuadrado de sup. $9u^2$, lados // a los ejes, un vértice en $y = x + 2$ y otro en $2x + y - 8 = 0$ (muchas soluciones)

Hallar el área de un exágono que tiene dos lados en las rectas $x - 2y + 1 = 0$ y $x - 2y + 9 = 0$

Tercero de B.U.P. Grupo "A" Matemáticas

Hoja de problemas X. 10. 10. 1990

Tema: [A] Geometría analítica

(*) Realizar las siguientes operaciones (si son posibles), indicando si el resultado es un número, un vector, o un punto. Usa estos datos:

$A = (-2,3)$, $B = (4,1)$, $C = (-1,2)$, $\vec{u} = (3,1)$, $\vec{v} = (2,-3)$ [2 decimales]

(1) $C + \overrightarrow{AB}$ (2) $(P + \vec{u}) + 2\vec{v}$ (3) $|\vec{u}| + 3$

(4) $d(A,C) + |2\overrightarrow{BC}|$ (5) $d(A,\vec{u}) + |\vec{v}|$ (6) $|\vec{u}+\vec{v}| + |A|$

(7) $d(A, B+\vec{u}) - \vec{v}\cdot\overrightarrow{BC}$ (8) $\left|\overrightarrow{(A-\vec{v})(B-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA})}\right|$

(*) Resolver las siguientes ecuaciones [2 decimales]

(9) $x = |(\sqrt{2},\sqrt{3})|$ (10) $2 = |(x,1)|$ (11) $7 = |(x,x)|$

(12) $d((8,3),(1,x)) = 6$ (13) $(4,x)\cdot(-1,5) = 4$

(14) Encontrar las ecuaciones vectorial, paramétricas, implícita y explícita de la recta r que pasa por el punto $(5,3) = A$ y tiene vector de dirección $\vec{v} = (-1,3)$

(15) ¿Qué ecuación tiene la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto $Z = (3,4)$?

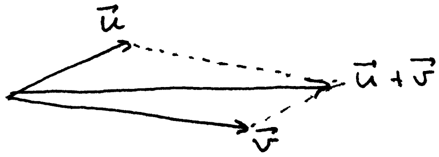
Tercero de B.U.P.   Grupo "A"   Matemáticas

Hoja de teoría   X. 10. 10. 1990

Tema: Operaciones con vectores y puntos

SUMA DE VECTORES

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$$



vector + vector → vector

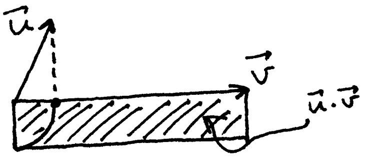
PRODUCTO DE UN ESCALAR Y UN VECTOR

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\in\mathbb{R}\\ \vec{u}=(u_1,u_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\vec{u}=(\alpha u_1,\alpha u_2)$$

número . vector → vector

PRODUCTO ESCALAR

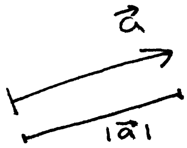
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2$$



vector . vector → número

MÓDULO DE UN VECTOR

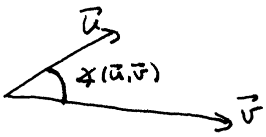
$$\vec{a}=(a_1,a_2)\Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$



|vector| → número

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

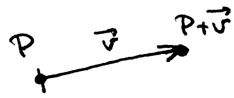
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \measuredangle(\vec{u},\vec{v})=\arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$



$\measuredangle$ (vector, vector) → número

SUMA DE PUNTO Y VECTOR

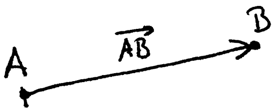
$$\left.\begin{array}{l}P=(p_1,p_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\}\Rightarrow P+\vec{v}=(p_1+v_1,p_2+v_2)$$



punto + vector → punto

VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS

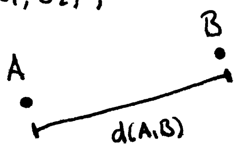
$$\left.\begin{array}{l}A=(a_1,a_2)\\ B=(b_1,b_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$$



$\overrightarrow{\text{punto punto}}$ → vector

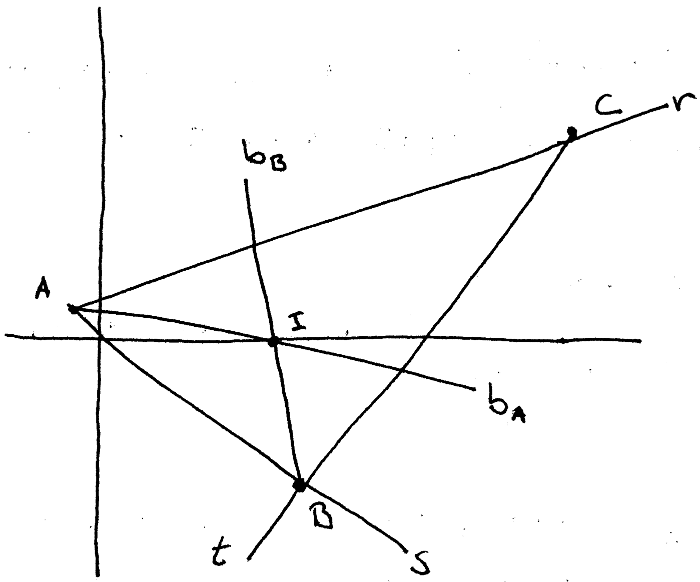
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

$$\left.\begin{array}{l}A=(a_1,a_2)\\ B=(b_1,b_2)\end{array}\right\}\Rightarrow d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$



d(punto, punto) → número

Demostrar que el incentro del triángulo de vértices $A=(-1,2)$, $B=(11,-7)$ y $C=(23,9)$ es $(10,0)$



b_A

$$\vec{AC} = (24,7) \Rightarrow \vec{n}_r = (7,-24) \Rightarrow r \equiv 7x - 24y + 55 = 0$$

$$\vec{AB} = (12,-9) \Rightarrow \vec{n}_s = (9,12) \rightarrow (3,4) \Rightarrow s \equiv 3x + 4y - 5 = 0$$

$$d(P,r) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|7x-24y+55|}{25} = \frac{|3x+4y-5|}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x-24y+55 = 5(3x+4y-5) \Rightarrow 8x+44y-80=0 \\ 7x-24y+55 = -5(3x+4y-5) \Rightarrow 22x-4y+30=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{A1} \equiv 2x+11y-20=0 \\ b_{A2} \equiv 11x-2y+15=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} (2x+11y-20)_C = 125 > 0 \\ (2x+11y-20)_B = -75 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow b_A = b_{A1} \Rightarrow b_A \equiv 2x+11y-20=0$$

$$\left[\begin{array}{l} m_r = \frac{7}{24} \Rightarrow \alpha_r \simeq 16^\circ \\ m_s = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha_s \simeq -37^\circ \\ m_{bA1} = -\frac{2}{11} \Rightarrow \alpha_{bA1} \simeq -10^\circ \\ m_{bA2} = \frac{11}{2} \Rightarrow \alpha_{bA2} \simeq 80^\circ \end{array} \right. \Rightarrow b_A = b_{A1}$$

$b_B)$

$$\overrightarrow{BC} = (12,16) \Rightarrow \vec{n_t} = (4,-3) \Rightarrow t \equiv 4x-3y-65=0$$

$$d(P,t) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|4x-3y-65|}{5} = \frac{|3x+4y-5|}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x-3y-65 = 3x+4y-5 & \Rightarrow b_{B1} \equiv x-7y-60=0 \\ 4x-3y-65 = -3x-4y+5 & \Rightarrow b_{B2} \equiv 7x+y-70=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x-7y-60)_A = -75 < 0 \\ (x-7y-60)_C = -100 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b_B = b_{B2} \Rightarrow b_B \equiv 7x+y-70=0$$

$I)$

$$I = b_A \cap b_B \Rightarrow \begin{cases} 2x+11y-20=0 \\ 7x+y-70=0 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} 2x+11(-7x+70)-20 \Rightarrow \\ y = -7x+70 \end{array}$$

$$\Rightarrow -75x = -750 \Rightarrow x=10 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \boxed{I = (10,0)}$$

Tercero de B.U.P.   Grupo "A"   Matemáticas

Hoja de problemas   L. 29. 10. 1990

Tema: [A3] Ecuaciones de las rectas

① Siendo $r \equiv 5x - 3y + 4 = 0$, hallar la ecuación explícita y la pendiente

② " $r \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$, " " " implícita y $\vec{n}_r$

③ " $r \equiv 4x + y + 1 = 0$, " las ecuaciones paramétricas

④ " $r \equiv y = \frac{2}{3}x + 1$, " " " "

⑤ Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos

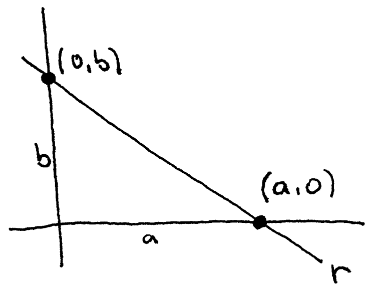
$A = (5,2)$ y $B = (-2,3)$

⑥ **Fórmula punto - pendiente**

Demostrar que si la recta r pasa por el punto $P = (x_0, y_0)$ y tiene pendiente "m", entonces $\boxed{r \equiv y - y_0 = m(x - x_0)}$

⑦ **Ecuación canónica o normal**

Demostrar que si la recta r pasa por los puntos $A = (a,0)$ y $B = (0,b)$, entonces $\boxed{r \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$



⑧ Hallar el punto de corte de las rectas

$r \equiv 2x + 3y - 4 = 0$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$

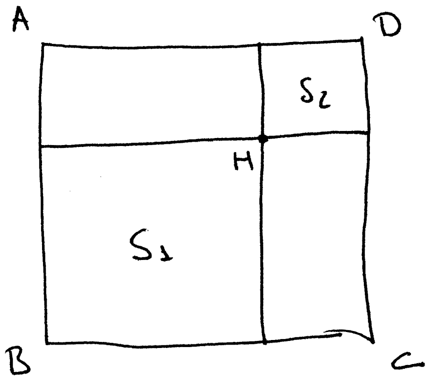
Tercero de B.U.P. Grupo "A" Matemáticas

Ex. de subir nota (1ª ev.) M. 20. 11. 1990

Temas: [A1, A2] Vectores y puntos

(1) El triángulo $\widehat{ABC}$ tiene el baricentro en G. Los puntos medios de los lados del $\widehat{ABC}$ definen otro triángulo más pequeño. Demostrar que su baricentro también es G

(2)



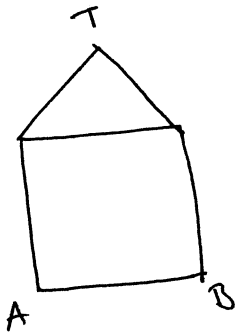
$S_1 = 4 S_2$

$A = (-3, 4)$, $C = (-3, -2)$

$B = (-6, 1)$

Hallar H

(3)



Explicar métodos para calcular T conocidos A y B

Matemáticas Tercero de B.U.P. Curso 1991-92

Hoja de problemas. ***Parte C : Geometría.*** **Fecha: L.10.2.1992**

A = (-1,3); B = (2,0); C = (1,1); $\overline{u}$ = (-3,-4); $\overline{v}$ = (2,-1)

Realizar las operaciones que se indican a continuación con los datos presentados más arriba, teniendo en cuenta que si la operación no se puede realizar, hay que explicar claramente por qué y si es posible realizarla, hay que indicar si el resultado es un número, un vector o un punto.

[1] $d(A,B+2\overline{u})$

[2] $|\overline{v}|-\overline{u}\cdot\overline{AB}$

[3] $d(\overline{u},2\overline{v})$

[4] $\overline{AC} + 3\overline{v} - 2\overline{BA}$

[5] $(B+3\overline{v}) + (\overline{u}-\overline{AB})$

[6] $\measuredangle(\overline{u},\overline{BC})$

[7] $\measuredangle(A+\overline{u},\overline{v})$

[8] $|\overline{A(B+u)}|$

[9] $|\overline{u}-\overline{v}| + \measuredangle(\overline{AB},\overline{AC})$

Matemáticas Tercero de B.U.P. Curso 1991-92

Hoja de teoría. *Parte C : Geometría.* **Fecha: L.10.2.1992**

Clasificación de triángulos

Los triángulos se pueden clasificar atendiendo a sus lados o atendiendo a sus ángulos.

Por sus lados

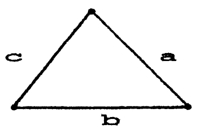
Escaleno	Tiene los tres lados distintos
Isósceles	Tiene dos lados iguales
Equilátero	Tiene los tres lados iguales

Por sus ángulos

Acutángulo	Tiene los tres ángulos agudos
Rectángulo	Tiene un ángulo recto
Obtusángulo	Tiene un ángulo obtuso

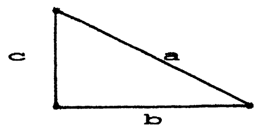
Conocidos los tres lados de un triángulo es posible clasificarlo por sus ángulos utilizando el siguiente criterio:
Llamando "a" al lado mayor y "b" y "c" a los otros dos, se verifica:

<u>Acutángulo</u>



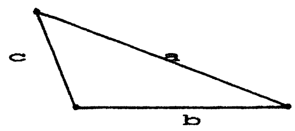
$a^2 < b^2 + c^2$

<u>Rectángulo</u>



$a^2 = b^2 + c^2$

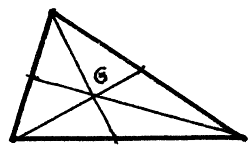
<u>Obtusángulo</u>



$a^2 > b^2 + c^2$

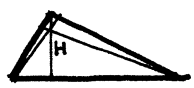
Medianas

Son segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. Se cortan en el <u>***BARICENTRO***</u>, que es el centro de masas del triángulo y dista dos tercios del vértice y un tercio del punto medio.



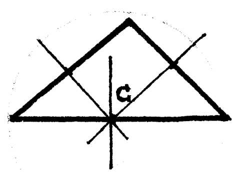
Alturas

Son segmentos que unen perpendicularmente cada vértice con el lado opuesto (o su prolongación). Se cortan en el <u>***ORTOCENTRO***</u>.



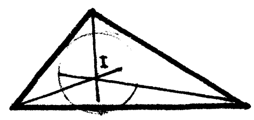
Mediatrices

Son rectas perpendiculares a cada lado por su punto medio. Se cortan en el <u>***CIRCUNCENTRO***</u>, que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



Bisectrices

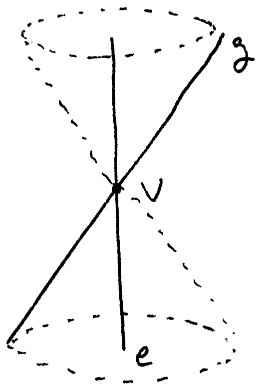
Son las bisectrices de los ángulos. Se cortan en el <u>***INCENTRO***</u>, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



Cónicas

1. Generalidades

Superficie cónica



Es la que se obtiene al girar una recta g (generatriz) respecto a una recta secante e (eje)

El punto de corte de g y e se llama vértice (V) de la superficie

Definición

Cónica es cualquier curva obtenida al cortar una superficie cónica con un plano. Si el plano pasa por el vértice de la sup. cónica, la cónica resultante recibe el nombre de cónica degenerada.

Tipos de cónica (pg. 113)

Sean $\alpha = \measuredangle(e, g)$, $\beta = \measuredangle(e, \pi)$

a) $\alpha < \beta$ Elipse

Caso particular : $\beta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ circunferencia

b) $\alpha = \beta$ Parábola

c) $\alpha > \beta$ Hipérbola

Las degeneradas, como ejercicio

Ecuaciones de una cónica

En el plano π podemos elegir dos ejes de coordenadas y entonces los puntos de la cónica y sólo ellos verifican una ecuación, que siempre es de la forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$ ó $c \neq 0$

Como suele ser en general bastante complicada, conviene elegir los ejes de modo que sean cero el mayor número de coeficientes que sea posible. La ecuación que se obtenga se llama ecuación reducida, que toma distinta expresión según la cónica.

Pos. relativa de cónica y recta

Una cónica y una recta pueden ser:

Exteriores : ningún punto de contacto
Tangentes : un punto de contacto y la recta no atraviesa la cónica.
Secantes : dos puntos de contacto o uno en el que la recta atraviesa la cónica.

Tangente a una cónica por un punto de ella

[Recordar de segundo la def. de derivada, la derivada en forma explícita y en forma implícita]

Sea C una cónica y $P = (p_1, p_2) \in C$

CN3

La tangente a C en P es $y = mx + g$, bastando hallar m, que es y'_P; para calcular y'_P hay dos métodos:

a) Despejar "y" de la ecuación de la cónica y derivar en forma explícita. Esto no siempre es posible y a veces hay que decidir entre dos expresiones de "y"

b) Derivar la ecuación de la cónica en forma implícita, sustituir el punto y despejar "y'". Es lo más sencillo

Ejemplos

2. La circunferencia

Lugar geométrico

Es un conjunto de puntos que verifican alguna condición geométrica

Circunferencia

Es l. g. de los puntos del plano que equidistan de otro llamado centro

Ecuación general

Sea C una circunferencia de centro $T = (a,b)$ que dista de todos los puntos de C la distancia R llamada radio.

Entonces $P \in C \Leftrightarrow d(T,P) = R$.

$$d(T,P) = R \Rightarrow \dots \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \equiv x^2+y^2 + (-2a)x + (-2b)y + (a^2+b^2-R^2) = 0$$

$$Coef(x^2) = Coef(y^2) \wedge Coef(xy) = 0$$

Ecuación reducida

Eligiendo los ejes de modo que $T = O = (0,0)$, queda $x^2+y^2 = R^2$

Ejemplos

a) Dado T y R, hallar C

b) Dada la ec., hallar T y R

3. La elipse

Definición

Es el l. g. de los p. del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

[Al dibujarla ver que $d(F,F') < K$]

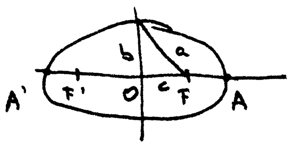
Ecuación general

Como ejemplo, obtener la ec. de la elipse de focos $(-2,0)$ y $(1,1)$ y $K = 4$

Sea $P = (x,y) \in$ elipse , $F = (1,1)$, $F' = (-2,0)$

$d(F,P) + d(F',P) = 4 \Rightarrow \dots \Rightarrow$

Elementos de una elipse



Simetrías

$K = 2a$ = eje mayor (ya que $A \in$ elipse)

a: semieje mayor

$d(F,F')$ = dist. focal $= 2c$

c: semieje focal.

O: centro de la elipse

$2b$: eje menor

b: semieje menor

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$; $c \leq a \Rightarrow e \leq 1$

$e = 1 \Rightarrow c = a \Rightarrow$ Elipse $= \overline{AA'}$

$e = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow F = F' \Rightarrow$ Elipse = circunf. de centro F y radio a

$a^2 = b^2 + c^2$

Radios vectores: $\vec{r} = \overline{PF}$, $\vec{r}\,' = \overline{PF'}$

CN 6

Ecuación reducida

Elijiendo los ejes de modo que $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$, se obtiene

$$d(F, P) + d(F', P) = 2a \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pos. rel. de elipse y recta

2 puntos de corte → secantes

1 punto de corte → tangentes

0 puntos de corte → exteriores

4. La hipérbola

Definición

Es el l.g. de los p. del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante

[Al dibujarla ver que $d(F,F') > K$]

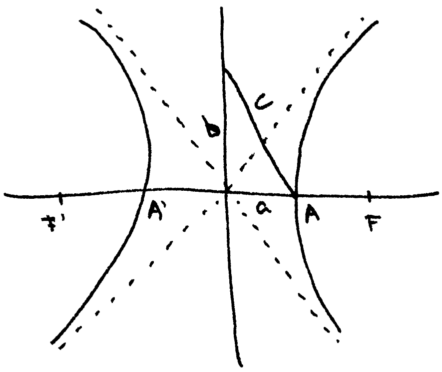
Ecuación general

Como ejemplo, obtener la ec de la hip. de focos $(-2,0)$ y $(1,1)$ y $K = 2$

Sea $P = (x,y) \in$ hip. , $F = (1,1)$, $F' = (-2,0)$

$d(F,P) - d(F',P) = 2 \Rightarrow \dots \Rightarrow$

Elementos de la hipérbola



Simetrías

$K = 2a$ = eje mayor (ya que $A \in$ hip.)

a : semieje mayor

$d(F,F')$ = dist. focal = $2c$

c : semidistancia focal

O : centro de la hip.

$2b$: eje menor

¿Orden?

b : semieje menor

Excentricidad : $e = \frac{c}{a}$; $c \geq a \Rightarrow e \geq 1$

$e = 1 \Rightarrow c = a \Rightarrow$ hip $= \mathbb{R} - (\overline{FF'})$

$c^2 = a^2 + b^2$

Radios vectores $\vec{r} = \overline{PF}$, $\vec{r}' = \overline{PF'}$

Rectas asíntotas

Ecuación reducida

Eligiendo los ejes de modo que $F = (c,0)$, $F' = (-c,0)$, se obtiene

$$d(F,P) - d(F',P) = 2a \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ec. de las asíntotas

$y = \frac{b}{a}x \wedge y = -\frac{b}{a}x$

Posición relativa de hip. y recta

2 puntos de corte → secante

1 punto de corte y $r \parallel$ asint. → secante

" $\nparallel$ → tangente

0 puntos de corte → exterior

Hipérbola equilátera

Es aquella en la que $a = b$

Como las asíntotas son perpendiculares, se puede tomar como ejes y entonces la ecuación de la hipérbola queda $xy = K$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

$$d((x,y), \text{asint.}) \cdot d((x,y), \text{asint.}') = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} = \frac{|x^2-y^2|}{2} = \frac{a^2}{2} = K$$

5. La parábola

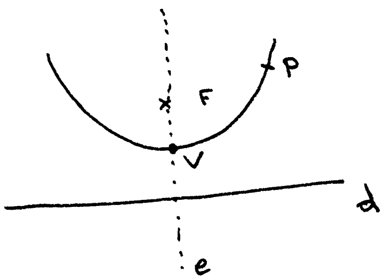
Definición

Es el l.g. de los puntos del plano que equidistan de una recta llamada directriz y un punto llamado foco

Ecuación general

[Sacar una como ejemplo] No tiene interés

Elementos de la parábola



$d(F, d) = p$ = parámetro de la parábola

eje $\equiv e$: perpendicular a d por F

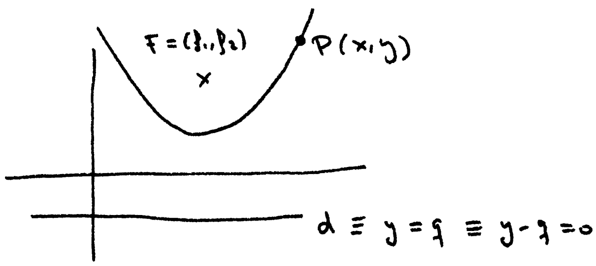
(es eje de simetría)

Vértice : V : intersección del eje y la par.

Radio vector : $\overrightarrow{FP}$

Ecuación más usada

1. Si $e \parallel OY$



$$d(F, P) = d(P, d) \Rightarrow \dots \Rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

2. Si $e \parallel OX \Rightarrow x = ay^2 + by + c$

CN 10

Ecuación reducida

Se eligen los ejes de modo que $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$, $d \equiv y = -\frac{p}{2}$

$$d(P, d) = d(P, F) \Rightarrow \dots \Rightarrow y = \frac{1}{2p} x^2$$

Posición relativa de recta y Pr:

2 puntos de corte : secante

1 punto de corte y $r \parallel e$: secante

1 " y $r \nparallel e$: tangente

0 " : exterior

Problemas generales sobre circunferencia

* Ec. circunf. que pase por tres puntos
* " " dado el centro y una recta tg.
* " " que pase por dos puntos y tiene el centro en r

Interesantes

Ec. de la tg. a una circunf. por un punto exterior

Hallar los vértices de un triángulo equilátero inscrito a $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{5}} = 1$ sabiendo que uno de ellos es el vértice A

Hallar la long. de la cuerda interceptada por $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ sobre la hip. $3x^2 - 8y^2 = 9$ (Solución: 5)

Cálculo diferencial

1. Crecimiento y convexidad

Recordatorios

Intervalos

Operaciones con funciones

Definición de límite finito

Def. de función cont. en un punto

Def. $f'(x)$

Deriv. $\Rightarrow$ cont. ($\not\Leftarrow$)

Intervalos centrados

$x_0, \varepsilon \in \mathbb{R} \mid \varepsilon > 0$

Intervalo de centro x_0 y radio ε : $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

[Llamarle entorno de x_0, si hace falta]

Definiciones sobre crecimiento

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$

1. f tiene un mx. rel. en x_0 $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

$>$

2. mn

3. Si f tiene un mx. o mn. rel. en x_0, se dice que tiene un extremo rel.

4. f creciente en $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \mid \begin{cases} x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$

5. decreciente

Proposición

Sea $G \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $h_0 \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{h\to h_0} G(h) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta>0 \mid h \in (h_0-\delta, h_0+\delta) - \{h_0\} \Rightarrow G(h) > 0$

2. $<$ $<$

Demostración

1. $L > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid h \in (h_0-\delta, h_0+\delta) \Rightarrow G(h) \in (L-L, L+L) = (0, 2L) \Rightarrow G(h) > 0$

2. $-L > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid h \in (h_0-\delta, h_0+\delta) \Rightarrow G(h) \in (L-(-L), L+(-L)) = (2L, 0) \Rightarrow G(h) < 0$

Teorema

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ derivable en $x_0 \in \mathbb{R}$

1. $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ creciente en x_0
2. $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decreciente en x_0

Demostración 1

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \mid h \in (-\delta, \delta) - \{0\} \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$$

Llamamos $x = x_0 + h$, con lo que $h = x - x_0$

$$x \in (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow x - x_0 = h \in (-\delta, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h < 0 \\ \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

$$x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow \dots \Rightarrow f(x_0) < f(x)$$

Ejemplos

a) Est. el crec. de una función en un punto

b) Decir los int. de crec. y decrec. de una función (e.d.: estudiar el crec. de una función)

[Calculando las raíces de f' — y los puntos de no derivabilidad — y calculando f' en algún punto de cada intervalo]

Teorema

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ derivable en $x_0 \in \mathbb{R}$

Si f tiene un extremo relativo en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$

Demostración

$$f \text{ tiene un extremo rel en } x_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ no es creciente en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \\ f \text{ no es decreciente en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Teorema

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ suficientemente derivable y $x_0 \in \mathbb{R} \mid f'(x_0) = 0$

1. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un mx. rel. en x_0
2. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mn. rel. en x_0

Demostración 1

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow (f')'(x_0) < 0 \Rightarrow f'$ decreciente en $x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \mid \begin{cases} x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow \\ x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente en $x \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

$\Rightarrow f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decreciente en $x \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

Luego $\exists \delta > 0 \mid x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) < f(x_0)$, así que

f tiene un máx. rel. en x_0

Ejemplos

Calcular máx. y mín. rel. de funciones: polinomios, exponenciales, logaritmos

Resumen est. del crec. de una f. en un punto

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ suficientemente derivable, $x_0 \in \mathbb{R}$

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ crec. en x_0

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene mín. rel en } x_0 \\ f''(x_0) = 0 \Rightarrow \text{puede ocurrir cualquier caso} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máx. rel. en } x_0 \end{cases}$$

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decreciente en x_0

EDS

Definiciones sobre convexidad

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ derivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ y $TG(x)$ la tangente a la curva en x_0

[Como f es derivable, TG no es vertical]

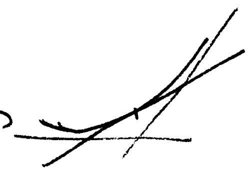
1. f convexa en $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > TG(x)$
2. f cóncava en $x_0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \mid x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) < TG(x)$
3. f tiene un punto de inflexión en $x_0 \Leftrightarrow f$ es cóncava a la izq. de x_0 y convexa a la derecha o viceversa

Teorema

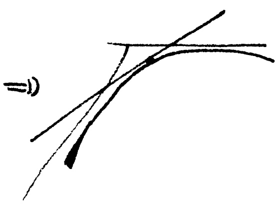
Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ s.d. en $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava en x_0
2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es convexa en x_0
3. f tiene un p.i. en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$
4. $f''(x_0) = 0 \neq f'''(x_0) \Rightarrow f$ tiene un p.i. en x_0

Justificación

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow (f')'(x_0) > 0 \Rightarrow f'$ creciente en $x_0 \Rightarrow$  $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ cóncava en x_0

2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow (f')'(x_0) < 0 \Rightarrow f'$ decreciente en $x_0 \Rightarrow$  $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ convexa en x_0

CD 6

3. f tiene p.i. en $x_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ no es cóncava en } x_0 \\ \text{'' '' '' convexa} \end{array} \right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(x_0) \leq 0 \\ f''(x_0) \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow f''(x_0) = 0$$

4. $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f''$ crec. o decrec. en $x_0 \Rightarrow f''$ toma distinto signo a cada lado de $x_0 \Rightarrow f$ pasa de cóncava a convexa o viceversa en $x_0 \Rightarrow f$ tiene p.i. en x_0

Ejemplos

a) Est. convexidad en un punto

b) '' '' de una función

c) Calcular p.i. de funciones

CD 7

2. Regla de L'Hôpital

Los límites de un cociente que sean indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ a veces pueden ser calculados derivando independientemente numerador y denominador, es decir, la expresión

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

es cierta en muchas ocasiones

Ejemplos y ejercicios

a) Indeterminaciones $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ de segundo de B.U.P.

b) Cocientes

c) Productos $\rightarrow$ $a \cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$

d) Potencias $\rightarrow$ tomando ln.

CD8

3. Representación de funciones

Se trata de dibujar el grafo o gráfica de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

Se utilizan las "pistas" que se consideren necesarias en cada caso.

Dominio

$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x) \}$

Casos con fracciones, raíces, logaritmos y arcos

Simetrías

f par $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(-x)$, $Gr(f)$ simétrica resp. a OY

f impar $\Leftrightarrow$ $f(x) = -f(-x)$, $Gr(f)$ " " " O

Continuidad

Encontrar los puntos de discontinuidad de la func y en ellos calcular los límites laterales

Puntos de corte con los ejes

$x=0 \Rightarrow y = f(0) \longrightarrow (0, f(0))$

$y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x = x_1, \ldots, x_n \longrightarrow (x_1,0), \ldots, (x_n,0)$

Crecimiento y convexidad

Imprescindible calcular mx. y mn. rel. y p.i.

A veces interesante decir los int. de crec. y conv.

Asintotas

Una recta y una curva se dice que son asintotas cuando la distancia entre ambas tiende a 0

Verticales $x = a$ cuando $\lim_{x \to a} f(x)$ es infinito

Horizontales $y = b$ cuando $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ (por la dcha.)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ (por la izq.)

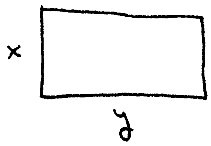
Oblicuas $y = mx + q$ con $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} f'(x)$

$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$

Si una función no tiene por, un lado, ni asint. h. ni oblicua, se dice que tiene una rama parabólica por ese lado.

4. Máximos y mínimos condicionados

El problema es calcular el máximo o mínimo de una función que verifique además algunas condiciones suplementarias. Por ejemplo: "de todos los rectángulos de perímetro 4, hallar el de área máxima"; se trata de encontrar el máximo de la función "área", pero se debe verificar que "perímetro = 4". Expresándolo simbólicamente:



$$S = xy$$
$$P = 2x + 2y$$

Debe ser S máximo y $P = 4$

Como S es una función de dos variables independientes, no podemos usar los métodos que hemos estudiado, así que hay que convertir S en una función de una variable independiente usando la condición suplementaria $P = 4$

$$P = 4 \Rightarrow 2x + 2y = 4 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow S = x(2-x) = -x^2 + 2x$$

Y basta buscar el máximo de $S(x) = -x^2 + 2x$

CB – P

Extremos relativos y p.i.

$e^{f(x)}$

$x - \ln(x-3)$

$ax + b + \dfrac{1}{x-c}$

$\dfrac{2}{x} + \ln x$

$\operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh} x$

$\dfrac{x^2-1}{2x} - \ln x$

$\operatorname{arcsen} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

CD - P

Representaciones gráficas

$x^3 - 3x$, $x^3 - 9x$

$x^4 + 2x^2$

$\frac{1}{x}$

$ax + b + \frac{1}{x-c}$

$\frac{x^3}{3} - 2x^2$

Funciones con $| \; |$

$x^3 + 3x^2$

$x^3 - 6x^2$

$y = \frac{4x-5}{x^2-1}$ $y = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$ (no calcular los p.i.)

$y = \frac{x^2-4}{x+1}$

Máximos y mínimos condicionados

Descomponer 5 en dos sumandos de modo que $2 \cdot 1^{\circ} + (2^{\circ})^2$ mín

" 25 " " " " " " $2 \cdot (1^{\circ})^2 + 3(2^{\circ})^2$ mín.

" 10 " " " " " " $4(1^{\circ}) + 2(2^{\circ})$ mín

" 10 " " " " " " $(1^{\circ} - 2^{\circ}) + (1^{\circ} \cdot 2^{\circ})$ mx.

" " " " " " " $1^{\circ} \cdot (2^{\circ})^2$ mx

" 18 " " " " " " $\sqrt{1^{\circ}} + \sqrt{2^{\circ}}$ mx.

" 98 " " " " " " $1^{\circ} \cdot (2^{\circ})^3$ mx

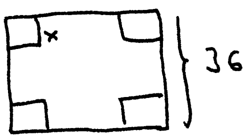
" 24 " " " " "

Escribir 5 como fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$ de modo que $10(a+b) - ab$ mx.

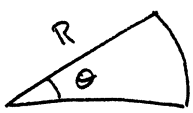
Rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia

Cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera

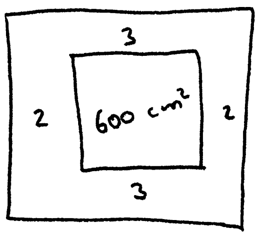
Cilindro de volumen determinado y superficie mínima



Volumen de la caja resultante, máximo



Perímetro P y área máxima



Superficie mínima

Rectángulo de superficie 9 y diagonal mínima

Una estatua de 2 m descansa sobre un pedestal de 5 m. ¿A qué distancia del eje de la estatua se ha de situar un hombre de 1.70 m para ver la estatua con mayor ángulo. [Ind.: hacer mx. tg ∡. Solución ~ 4.2 m]

(CD - P)

Máximos y mínimos condicionados

Dimensiones de un prisma recto de base cuadrada de volumen máx.

y suma de sus aristas 48

Las manillas de un reloj miden 8 y 10 cm. Sus extremos se unen

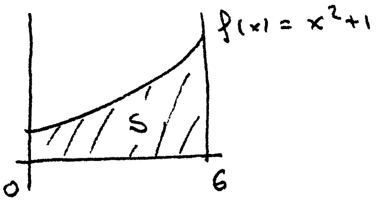
formando un triángulo. Expresar Sup (t). Hallar t_0 | $t_0 \in (12, 12{:}30)$

$\wedge$ Sup (t_0) máx.

Cálculo integral

[0. Clase preparatoria]

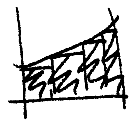
Problema 1



Calcular S

Método: dividir [0,6] en n partes iguales

y calcular S_n:



$S_1 = 6$; $S_2 = 33$; $S_3 = 46$; $S_6 = 61$, $S_{60} = 76.21$

$S_{600} = 77.8201$; $S_{6000} = 77.982$; $S_{60000} = 77.9982$; $S_{600000} = 77.99982$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 78$ (parece) $\Rightarrow$ $S = 78$

Problema 2

Siendo $f(x) = x^2+1$, hallar funciones $F(x)$ que verifiquen $F'(x) = f(x)$

Problema 3

Calcular $F(6) - F(0)$

Conclusión

$\int_0^6 f = F(6) - F(0)$. Hablar de integ. def. e indefinidas.

Ejercicio

Hallar S

1. Concepto de primitiva

En lo sucesivo, las funciones son de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

Definición

Dada la función f se dice que F es una función primitiva de f cuando $F' = f$

Propiedad

Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, también lo es $F(x) + C$, $\forall C \in \mathbb{R}$

Definición

Integral indefinida de $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas.

Se escribe $\int f(x)\,dx$.

Si $F(x)$ es una, se puede escribir $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,

con $C \in \mathbb{R}$ que se llama constante de integración

Propiedades

1. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx$

2. $\forall k \in \mathbb{R}$: $\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

Integrales inmediatas

1. $n \neq -1$ $\qquad \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int (f(x))^n f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ (Demostrándolo)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

3. $\int e^x\,dx$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx$$

$$\int a^x\,dx$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f(x)\,dx$$

4. $\int \operatorname{sen} x\,dx$

$$\int \cos x\,dx$$

$$\int (\operatorname{sen} f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\int (\cos f(x)) \cdot f'(x)$$

5. $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$

$$\int (\sec^2 x)\, f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \operatorname{tg} f(x) + C$$

$$\int (\operatorname{cosec}^2 x)\, f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} f(x) + C$$

6.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$$

<u>Contraejemplos</u>

Las siguientes funciones <u>no</u> tienen primitivas que se puedan expresar como suma finita de funciones elementales, aunque <u>sí</u> tienen primitivas:

$$e^{-x^2} \quad ; \quad \frac{1}{\ln x} \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

2. Cálculo de primitivas

Diferenciales

Sabemos que $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ y $dy = f'(x)\,dx = d(f(x))$

Con las diferenciales se opera igual que con las derivadas, e.d.:

$d(u+v) = du + dv$

$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$

$d(\operatorname{sen} x) = \cos x \, dx$

etc.

Dem: $d(u+v) = (u+v)'\,dx = u'dx + v'dx = du + dv$

$$\int d(f(x)) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

Integración por transformación

Si $\int f(x)\,dx$ no es inmediata, se puede intentar cambiar la expresión de $f(x)$ para conseguirlo

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$\int tg^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx$$

Integración por partes

$$d(uv) = du \cdot v + u\,dv \Rightarrow \dots \Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ejemplos y ejercicios

a) Sencillos

b) Para utilizar la fórmula varias veces

c) Integrales "reproductivas": aparece la integral otra vez al aplicar la f. 2 veces.

d) Cuando es necesario hacer $u = 1$

Integración de funciones racionales (planteamiento)

Una función racional es una función que es cociente de dos polinomios.

Si P y Q son dos polinomios, hay que calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Si la integral no es inmediata, la haremos por transformación

Raíces complejas de un polinomio

Sea $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ un polinomio. $(a_i \in \mathbb{R})$

Se dice que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de Q cuando $Q(z) = 0$

Ejemplos $Q \rightarrow a,\ \alpha+\beta i,\ \alpha-\beta i$; $Q \rightarrow a,\ b,\ a$

Se llama multiplicidad de una raíz al número de veces que se repite.

Nosotros buscamos todas las raíces $z \in \mathbb{C}$ que tenga Q

Ejemplo

Se puede demostrar que

1. $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ tiene n raíces complejas
2. Si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de Q también lo es $\bar{z}$
3. $Q(x) = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n)$, donde x_i son las raíces de Q

Nombres de las raíces:

Si $z \in \mathbb{R}$ es raíz de Q y tiene mult. 1, se llama raíz real simple
" " " " >1, " real múltiple
Si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ " " 1, " compleja simple
" " " " >1, " compleja múltiple.

Supongamos que Q tiene

p raíces reales simples $s_1, \dots, s_p$

q " " múltiples $t_1, \dots, t_q$ con multiplicidades $m_1, \dots, m_q$ y

r parejas de raíces complejas simples $(\alpha_1 + \beta_1 i), (\alpha_1 - \beta_1 i), \dots, (\alpha_r - \beta_r i)$

(Evidentemente $p + m_1 + \dots + m_q + 2r = n$)

Entonces podemos escribir

$$Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n) =$$

$$= a_n (x - s_1) \dots (x - s_p)(x - t_1)^{m_1} \dots (x - t_q)^{m_q} (x - (\alpha_1 + \beta_1 i))(x - (\alpha_1 - \beta_1 i)) \cdot$$

$$\dots (x - (\alpha_r + \beta_r i))(x - (\alpha_r + \beta_r i))$$

Los productos $(x - (\alpha + \beta i))(x - (\alpha - \beta i))$ se pueden escribir como

$(x - \alpha)^2 + \beta^2$ ó $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ según interese

Integración de funciones racionales (resolución)

Sea $Q(x)$ un polinomio sin raíces complejas múltiples y $P(x)$ un polinomio cualquiera

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{a_n (x-s_1)\cdots(x-(\alpha_r-\beta_r i))}\,dx =$$

$$= \int C(x)\,dx + \frac{1}{a_n}\Bigg[\int \Bigg(\frac{A_1}{x-s_1} + \cdots + \frac{A_p}{x-s_p} + \frac{B_{1,1}}{x-t_1} + \cdots + \frac{B_{1,m_1}}{(x-t_1)^{m_1}} +$$

$$+ \cdots + \frac{B_{q,1}}{x-t_q} + \cdots + \frac{B_{q,m_q}}{(x-t_q)^{m_q}} + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 - 2\alpha_1 x + \alpha_1^2 + \beta_1^2} + \cdots + \frac{C_r x + D_r}{x^2 - 2\alpha_r x + \alpha_r^2 + \beta_r^2} \Bigg) dx \Bigg]$$

donde los coeficientes A, B, C, D han de ser calculados.

Todas las integrales que quedan son inmediatas:

$$\int \frac{1}{x-s}\,dx = \cdots\cdots$$

$$\int \frac{1}{(x-t)^6}\,dx = \cdots\cdots$$

$$\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}\,dx = \cdots\cdots \quad (\ln + \operatorname{arctg})$$

Ejemplos y ejercicios

Calcular los coef.

a) Sólo simples

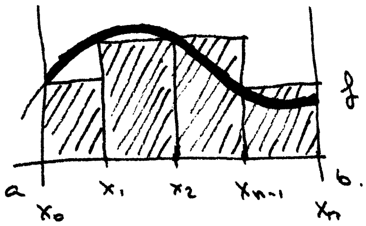
b) Sólo reales

c) Todo junto (poniendo polinomios como x^4-1)

d) Dividiendo

3. Integral de Cauchy

Definición de integral definida



Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Se divide $[a,b]$ en n partes iguales

Cada una tiene anchura $h = \frac{b-a}{n}$ (paso)

Llamamos $x_0 = a$; $x_1 = a+h$; ... ; $x_i = a+ih$; ..., $x_n = b$

Se define $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot h$

Integral definida de f entre a y b es: $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S_n$

Notación física $\to$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, h = \int_a^b f(x)\, dx$ [Expl. intuitiva]

a: lím. inf. de integración   b: lím. sup. integración.

Regla de Barrow

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva.

Entonces $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

Notación

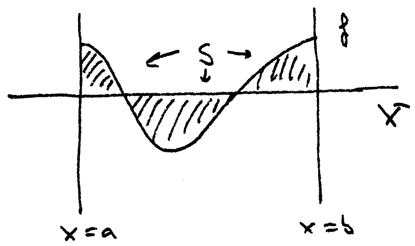
$$F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big]_a^b$$

Consecuencia

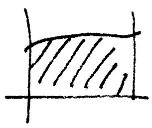
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \Big]_a^b$$

4. Cálculo de áreas

Área determinada por la gráfica de una función, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

Se trata de calcular 

, de modo que supondremos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua. [Intentar cálculo de un tirón]

a) $f \geq 0$ 

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\, h \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

$S = \int_a^b f$ (intuitivamente, por la definición de integr. definida)

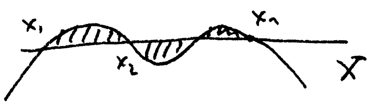
b) $f \leq 0$ (...) $S = -\int_a^b f$

c) Caso general

$f(x) = 0 \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

$S = \left| \int_a^{x_1} f \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^{b} f \right|$

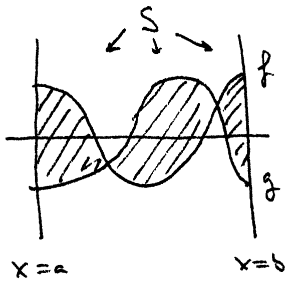
d) Caso particular: área det. por la gráfica de una función g y el eje de abscisas



$f(x) = 0 \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n$

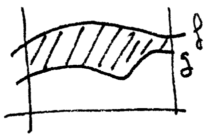
$S = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \right|$

Area determinada por las gráficas de dos funciones y dos rectas verticales

Se trata de calcular  , de modo

que supondremos que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas

a) $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq g(x) \geq 0$



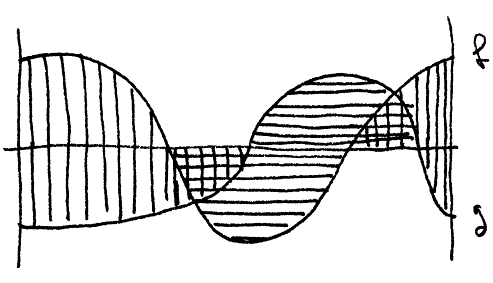
$$S = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$$

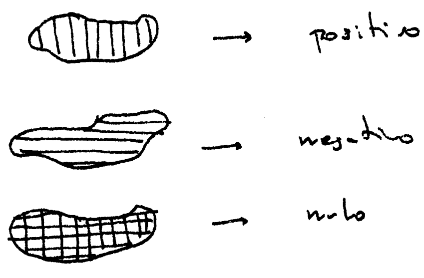
Si es necesario, se puede dem. con la regla de B. o con la def.

b) Caso general.

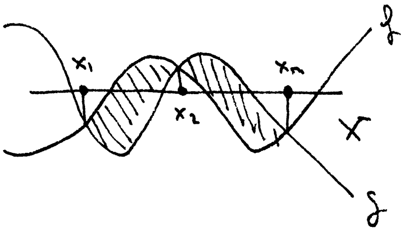
$f(x) = g(x) \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

$$S = \left| \int_a^{x_1} (f-g) \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f-g) \right| + \dots + \left| \int_{x_m}^{b} (f-g) \right| .$$ Justificación





c) Caso particular: área det. por dos funciones



$f(x) = g(x) \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n$

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f-g) \right|$$

CI - P1

Area $O\bar{X}$, f

$$\frac{2}{x^2+1} - 1$$

$$x(x^2+ax+c)$$

Area entre dos fun.

x^n, x^m // e^x, e^{-x}, $x=0$, $x=1$ // $y=x^3$, $xy=1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$

Integrales

Hallar f dando $f^{(n}$ y condiciones iniciales

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1} \qquad \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right)$$

Tercero de B.U.P.

Examen de suficiencia. Fecha: L. 18. 6. 1984

1. Si $z = 2+i$, $w = 2_{270^\circ}$, hallar $3z - 2\overline{w} + \dfrac{z}{3-i} + i^9$

2. Hallar $\sqrt[5]{1}$

3. Enunciar y demostrar el teorema del coseno

4. Dos lados de un triángulo miden 2 y 3; el ángulo comprendido es 60°. Hallar el otro lado, dos otros dos ángulos y el área

5. Resolver la ecuación $tg\, 4x = 1$ expresando el resultado en radianes

6. Demostrar que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en x_0, entonces es continua en x_0

7. Hallar la ecuación de una circunferencia que pasa por $(0,2)$ y $(4,2)$ y tiene el centro en la recta $x - y = 0$

8. Dada la parábola $y = 2x^2 - 3x$, hallar el punto de ella que tiene abscisa 1. Encontrar la ecuación de la tangente en ese punto. Dar la ecuación de una recta que sea perpendicular a la tangente anterior y que pase por $(5,3)$

9. Encontrar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de $f(x) = x^3 - 3x$

10. Enunciar y demostrar la regla de Barrow

11. $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} 3x \, dx$

12. $\displaystyle\int_0^3 \frac{3x+4}{x^2+3x+2}\, dx$

13. $\displaystyle\int \left(x^3 + \operatorname{sen} 3x - \frac{\sec^2 2x}{tg\, 2x} \right) dx$

14. Dada la muestra $\{4, 5, 1, 2, 4, 3, 2, 4, 1, 4\}$ hallar la moda, la mediana, el recorrido, la media, la desviación media y la varianza

Valor de las preguntas

1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13 : medio punto

2, 4, 8, 10 : un punto

14 : un punto y medio

Tercero B

Fecha: X. 5. 2. 1986 Tiempo: 50'

1p. 1 Definición de circunferencia, hipérbola y parábola

2p. 2 Distancia de un punto a una recta

3p. 3 Siendo $A = (1,1)$, $B = (-2,3)$, $C = (2,1)$, hallar:

a) Ecuaciones de la recta que pasa por A y B

b) Recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por C

c) Distancia de B a la recta que pasa por A y C

2p 4 Ecuación de la circunferencia de centro $(-3,1)$ y radio $\sqrt{20}$. Hallar la ecuación de las tangentes en los puntos $(1,3)$ y $(0,0)$

2p. 5 Hallar la excentricidad de una elipse centrada que pasa por $\left(2, \frac{\sqrt{20}}{3}\right)$ si su eje mayor es 6.

Para subir calificación

1 Hallar los vértices de un triángulo cuyos puntos medios de sus lados son $(-1,0)$, $(-2,2)$ y $(1,1)$

2 Demostrar que el punto $(-1,1)$ no pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ y hallar las ecuaciones de las dos tangentes a la circunferencia que pasan por ese punto.

Tercero C

Fecha: V. 7.3.1986 Tiempo: 50'

1p. (1) Definición de pendiente, elipse y parábola

2p. (2) Demostrar que si $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{a}, \vec{b} \neq 0$ entonces $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

3p. (3) Siendo $A = (-1, 2)$, $B = (3, 1)$, $C = (0, -1)$, hallar:

a) Ecuación de la recta que pase por A y B

b) Recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por C

c) Distancia de B a la recta que pasa por A y C

2p. (4) Ecuación de la circunferencia de centro $(2, 1)$ y radio $\sqrt{13}$. Hallar la ecuación de las tangentes en los puntos $(-1, -1)$ y $(0, 1)$

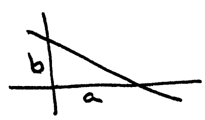
2p. (5) Los focos de una hipérbola son $(5, 0)$ y $(-5, 0)$ y el eje mayor mide 6. Hallar su ecuación y su excentricidad.

Para elevar calificación

(1) Encontrar todos los puntos $P \in r$ que verifican que $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$, donde $A = (3, 1)$ y $B = (4, 4)$

$x + 3y - 11 = 0$

(2) Demostrar que la recta del dibujo tiene ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$



Tercero C

1.5p ① Calcular $2_{120^\circ} \cdot 3_{150^\circ} + (-i)^{153} - \dfrac{5-5i}{1+2i} + (1-i)(2+3i)$

1.5p. ② Calcular $\sqrt[10]{-1}$

2p. ③ Hallar los máximos y mínimos de $f(x) = x\,e^{18x^2+13x}$

1.5p. ④ Hallar los p. i. de $g(x) = \ln \dfrac{1}{x}$

3.5p ⑤ Representar gráficamente $p(x) = \dfrac{-x^3}{2} - \dfrac{3x^2}{2}$, estudiando la convexidad.

Para elevar la calificación.

① Representar la función $f(x) = \dfrac{2}{e^x+1}$

② Hallar el dominio de la función $g(x) = \ln \ln \operatorname{sen} x$

③ Encontrar $z \in \mathbb{C} \mid (1+i)\,\bar{z} + 2_{270^\circ}\, z = i - 5$

Indicación $a+bi = c+di \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

Terceros B y C

Fecha: V. 6.6.1986   Tiempo: 50'

1.5p **(A1)** $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} \ln x$ 1p **(A2)** Der. parc. de $f(x,y,z) = x^y + z \operatorname{sen}(xy) + y e^z$

2.5p **(A3)** Desc. 10 en dos sumandos de modo que el cuádruple del primero y el cuadrado del segundo sumen lo menos posible

1p. 1.5p **(B1)** $\int x e^{3x} \, dx$ 2p. 2.5p **(B2)** $\int \frac{2x-8}{x^2-8x+20} \, dx$ 2p. 2.5p **(B3)** $\int \frac{8x-34}{x^2-8x+15} \, dx$

1.5p **(C1)** $\int \frac{\arccos(5x)}{\sqrt{1-25x^2}} \, dx$ 2p **(C2)** $\int x^3 \ln x \, dx$

Para subir nota

(1) $\int x^n e^x \, dx$ (2) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

Tercero de B.U.P.

Examen de repesca de todas las evaluaciones. Fecha: L.9.6.1996. Tiempo: máx. 2h.

1p. 2A Definición de pendiente, hipérbola y parábola

2p. 2B Demostrar que si $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^2 \mid \vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$ entonces $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$

4p 2C Los puntos $A=(1,6)$, $B=(5,1)$, $C=(-2,3)$ forman un triángulo. Hallar la longitud de una altura (1p.), la ecuación de una mediatriz (1p.) y el ortocentro (2p)

2p 2D Ecuación de la circunf. de centro $(3,3)$ y radio $\sqrt{13}$. Hallar la ec. de las tg. en los puntos $(6,1)$ y $(0,0)$

1p. 2E La ecuación de una elipse es $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. Representarla aproximadamente y calcular su excentricidad.

1p. 3A Operar $(5_{200^\circ}\cdot 6_{150^\circ})^3$ 1p 3B Operar $(-i)^{17}+(2-i)(3+i)+\frac{5+5i}{2+i}$

2p 3C Calcular $\sqrt[6]{1_{120^\circ}}$ 3p. 3D Representar la función $f(x)=x^3-3x$

1.5p 3E Calcular los puntos de inflexión de $g(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{2}+x^2$

1.5p 3F Calcular los máx. y mín. de $h(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$

1.5p 4A $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x$

1p 4B Der. parcial de $f(x,y,z)=e^{xy}+\operatorname{sen}(x^2z^2)+z\operatorname{tg}y$

2.5p 4C Desc. 5 en dos sumandos de modo que el doble del primero y el cuadrado del segundo sumen lo menos posible

2p 4D $\int\frac{13x-85}{x^2-13x+42}\,dx$

2p 4E $\int x^2e^{2x}\,dx$

2p 4F $\int\frac{2x-5}{x^2-10x+30}\,dx$

(1) Hallar los vértices de un triángulo cuyos puntos medios de sus lados son conocidos. Sólo el método

(2) Demostrar que el punto $(-1,1)$ no pertenece a la circunferencia $x^2+y^2-2x-2y=0$ y hallar las ec. de las dos tg. a la circunferencia que pasan por ese punto

(1) $\int x^n e^{-x} dx$ (2) $\int sen^2 x \, dx$

(1) De todos los conos de generatriz g, hallar las dim. del de mayor volumen

(2) Hallar una función $f(x,y)$ | $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = e^y$

(1) Hallar la distancia del punto $(6,3)$ a la recta $y = x+3$

a) Por métodos de geom. analítica

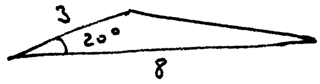
b) Por métodos del cálculo dif. Indicación: recordar la def. de dist. de un punto a una recta y poner la recta en forma paramétrica.

Tercero de B.U.P. Examen de suficiencia

① Si $\cos\alpha = t$, ¿cuánto vale $\cos 3\alpha$?

② Producto de números complejos

③ Resolver la ecuación $2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x = 2$

④ Resolver el triángulo 

⑤ Determinar el área, el baricentro y el circuncentro del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $(2,2)$, $(0,4)$ y $(-2,1)$

⑥ Dibujar la figura representada por la ecuación $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Decir su nombre, su definición y calcular su excentricidad.

⑦ Calcular $i^{107} + (3-2i)(1+i)\,2_{210^\circ} + \dfrac{10-20i}{3-i}$

⑧ Calcular $\sqrt[4]{-16}$

⑨ Demostrar que f tiene máximo relativo en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

⑩ Representar la función $y = x^4 - 2x^2$

⑪ Estudiar todo lo posible $y = \dfrac{e^x}{x}$ (mx., mn., p.i., asíntotas, repr. gráf. ...)

⑫ Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área de los que tienen perímetro 20

⑬ Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} \ln x$; $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^2$

⑭ Decir las derivadas parciales de $f(x,y,z) = x e^{xy} + z^3 \cos(y z^2) - \operatorname{arctg}(\ln y z)$

⑮ $\displaystyle\int e^{2x} \operatorname{sen} 2x \, dx$

⑯ $\displaystyle\int x e^{15x} \, dx$

⑰ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx$

⑱ $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2(x-1)} \, dx$

⑲ Hallar el área determinada por la función $y = x^2(x^2 - x - 2)$ y el eje de abscisas

Tercero de B.U.P. **Matemáticas**

Examen de suficiencia **V. 6. 9. 1990**

Primera evaluación

1. El triángulo $\widehat{ABC}$ tiene por vèrtices A=(1,5), B=(3,1) y C=(-2,2). Se pide:
   I) El ortocentro
   II) La longitud de la altura que pasa por A
   III) La longitud del lado BC
   IV) La superficie
   V) La ecuación implícita de la recta paralela al lado AB que pasa por el vèrtice C

Segunda evaluación

1. Encontrar la ecuación de una circunferencia que pase por el punto P=(-1,1) y sea concèntrica con la de ecuación $x^2+y^2+6x-2y-7=0$

2. De la cónica de ecuación $9x^2+16y^2-144=0$ se pide
   I) Determinar sus constantes
   II) Dar su definición como lugar geomètrico
   III) Representarla gráficamente

Tercera evaluación

1. Resolver la ecuación $\cos(2x) + 4\cos x = -1$

2. De un triángulo isósceles se sabe que el lado desigual mide 10 m y cada uno de los ángulos iguales mide 30°. Calcular su perímetro y su superficie.

3. Calcular $\sqrt[3]{-i}$ y representar gráficamente sus soluciones.

Cuarta evaluación

1. Representar gráficamente la función $y = \dfrac{x+1}{x-2}$

Quinta evaluación

1. $\displaystyle\int \left(x^5 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}\right) dx$

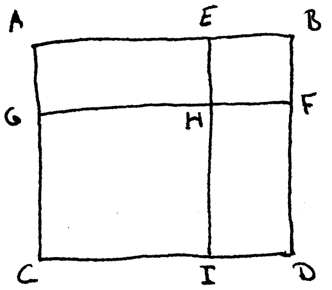
2. $\displaystyle\int \left(e^{6x} + \operatorname{sen}\frac{x}{4}\right) dx$

3. $\displaystyle\int \frac{7}{5+3x^2}\, dx$

Tercero de B.U.P. X. 20. 6. 1990 Matemáticas

Examen para elevar las calificaciones

⊛ Primera evaluación

(1) 

Hallar las coordenadas de H con los siguientes datos:
ABDC, EBFH y GHCI son cuadrados
Superficie (GHCI) = 4 · Superficie (EBFH)
$A = (-3,4)$, $D = (-3,-2)$, $C = (-6,1)$

(2) El triángulo $\widehat{ABC}$ es isósceles, $A = (-3,7)$, $B = (7,2)$ y el lado desigual está sobre la recta $r \equiv 3x - 4y - 13 = 0$. Hallar el vértice C.

⊛ Segunda evaluación

(1) Hallar la ecuación de las circunferencias que pasan por el punto (18,6), son tangentes al eje de ordenadas y tienen radio 13

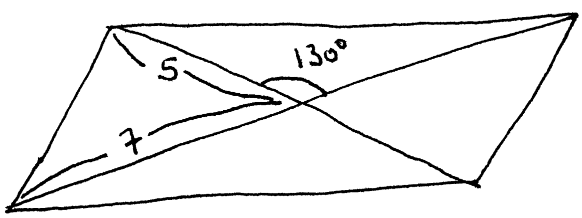
(2) Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la elipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) es $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$

(Indicación: puedes calcular la pendiente derivando en forma implícita la ecuación de la elipse y luego usar la fórmula punto-pendiente)

⊛ Tercera evaluación

(1) Demostrar la identidad $\frac{1 - \operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$

(2) 

Calcula el área del paralelogramo de la figura
(Usa calculadora)

(*) 4^a evaluación

① Representar gráficamente $y = \frac{e^x}{x}$

(*) Quinta evaluación

① Hallar las dimensiones del cono de menor generatriz de entre todos los que tienen volumen 18π Km³

② Calcular las siguientes integrales

I) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx$

II) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$

III) $\displaystyle\int \frac{tg\,x}{1-tg^2 x}\,dx$