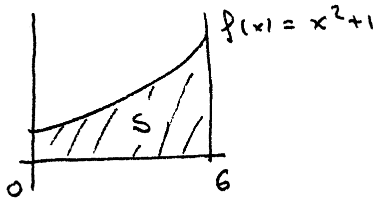
Cálculo integral

[0. Clase preparatoria]

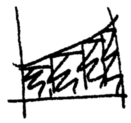
Problema 1



Calcular S

Método: dividir $[0,6]$ en n partes iguales

y calcular S_n:



$S_1 = 6$; $S_2 = 33$; $S_3 = 46$; $S_6 = 61$, $S_{60} = 76.21$

$S_{600} = 77.8201$; $S_{6000} = 77.982$; $S_{60000} = 77.9982$; $S_{600000} = 77.99982$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 78$ (parece) $\Rightarrow$ $S = 78$

Problema 2

Siendo $f(x) = x^2+1$, hallar funciones $F(x)$ que verifiquen $F'(x) = f(x)$

Problema 3

Calcular $F(6) - F(0)$

Conclusión

$\int_0^6 f = F(6) - F(0)$. Hablar de integ. def. e indefinidas.

Ejercicio

Hallar S

1. Concepto de primitiva

En lo sucesivo, las funciones son de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

Definición

Dada la función f se dice que F es una función primitiva de f cuando $F' = f$

Propiedad

Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, también lo es $F(x) + C$, $\forall C \in \mathbb{R}$

Definición

Integral indefinida de $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas.

Se escribe $\int f(x)\, dx$.

Si $F(x)$ es una, se puede escribir $\int f(x)\, dx = F(x) + C$,

con $C \in \mathbb{R}$ que se llama constante de integración

Propiedades

1. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x) dx + \int g(x)\, dx$

2. $\forall k \in \mathbb{R}$: $\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

Integrales inmediatas

1. $n \neq -1$ $\qquad \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int (f(x))^n f'(x)\, dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ (Demostrándolo)

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

3. $\int e^x\,dx$

$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx$

$\int a^x\,dx$

$\int a^{f(x)} \cdot f(x)\,dx$

4. $\int \operatorname{sen} x\,dx$

$\int \cos x\,dx$

$\int (\operatorname{sen} f(x)) \cdot f'(x)$

$\int (\cos f(x)) \cdot f'(x)$

5. $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

$\int (\sec^2 x)\, f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \operatorname{tg} f(x) + C$

$\int (\operatorname{cosec}^2 x)\, f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} f(x) + C$

6.
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$$

Contraejemplos

Las siguientes funciones no tienen primitivas que se puedan expresar como suma finita de funciones elementales, aunque sí tienen primitivas:

$$e^{-x^2} \quad ; \quad \frac{1}{\ln x} \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

2. Cálculo de primitivas

Diferenciales

Sabemos que $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ y $dy = f'(x)\,dx = d(f(x))$

Con las diferenciales se opera igual que con las derivadas, e.d.:

$d(u+v) = du + dv$

$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$

$d(\operatorname{sen} x) = \cos x \, dx$

etc.

Dem: $d(u+v) = (u+v)'\,dx = u'dx + v'dx = du + dv$

$$\int d(f(x)) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

Integración por transformación

Si $\int f(x)\,dx$ no es inmediata, se puede intentar cambiar la expresión de $f(x)$ para conseguirlo

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx$$

Integración por partes

$d(uv) = du \cdot v + u\,dv \Rightarrow \dots \Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$

Ejemplos y ejercicios

a) Sencillos

b) Para utilizar la fórmula varias veces

c) Integrales "reproductivas": aparece la integral otra vez al aplicar la f. 2 veces.

d) Cuando es necesario hacer $u = 1$

Integración de funciones racionales (planteamiento)

Una función racional es una función que es cociente de dos polinomios.

Si P y Q son dos polinomios, hay que calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Si la integral no es inmediata, la haremos por transformación

Raíces complejas de un polinomio

Sea $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ un polinomio. $(a_i \in \mathbb{R})$

Se dice que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de Q cuando $Q(z) = 0$

Ejemplo $Q \rightarrow a,\ \alpha+\beta i,\ \alpha-\beta i$; $Q \rightarrow a,\ b,\ a$

Se llama multiplicidad de una raíz al número de veces que se repite.

Nosotros buscamos todas las raíces $z \in \mathbb{C}$ que tenga Q

Ejemplo

Se puede demostrar que

1. $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ tiene n raíces complejas
2. Si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de Q también lo es $\bar{z}$
3. $Q(x) = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n)$, donde x_i son las raíces de Q

Nombres de las raíces:

Si $z \in \mathbb{R}$ es raíz de Q y tiene mult. 1, se llama raíz real simple

" " " " >1, " real múltiple

Si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ " " 1, " compleja simple

" " " " >1, " compleja múltiple.

Supongamos que Q tiene

p raíces reales simples $s_1, \dots, s_p$

q " " múltiples $t_1, \dots, t_q$ con multiplicidades $m_1, \dots, m_q$ y

r parejas de raíces complejas simples $(\alpha_1 + \beta_1 i), (\alpha_1 - \beta_1 i), \dots, (\alpha_r - \beta_r i)$

(Evidentemente $p + m_1 + \dots + m_q + 2r = n$)

Entonces podemos escribir

$$Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n) =$$

$$= a_n (x - s_1) \dots (x - s_p)(x - t_1)^{m_1} \dots (x - t_q)^{m_q} (x - (\alpha_1 + \beta_1 i))(x - (\alpha_1 - \beta_1 i)) \cdot$$

$$\dots (x - (\alpha_r + \beta_r i))(x - (\alpha_r + \beta_r i))$$

Los productos $(x - (\alpha + \beta i))(x - (\alpha - \beta i))$ se pueden escribir como

$(x - \alpha)^2 + \beta^2$ ó $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ según interese

Integración de funciones racionales (resolución)

Sea $Q(x)$ un polinomio sin raíces complejas múltiples y $P(x)$ un polinomio cualquiera

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{a_n (x-s_1)\cdots(x-(\alpha_r-\beta_r i))}\,dx =$$

$$= \int C(x)\,dx + \frac{1}{a_n}\left[\int \left(\frac{A_1}{x-s_1} + \cdots + \frac{A_p}{x-s_p} + \frac{B_{1,1}}{x-t_1} + \cdots + \frac{B_{1,m_1}}{(x-t_1)^{m_1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cdots + \frac{B_{q,1}}{x-t_q} + \cdots + \frac{B_{q,m_q}}{(x-t_q)^{m_q}} + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 - 2\alpha_1 x + \alpha_1^2 + \beta_1^2} + \cdots + \frac{C_r x + D_r}{x^2 - 2\alpha_r x + \alpha_r^2 + \beta_r^2} \right) dx \right]$$

donde los coeficientes A, B, C, D han de ser calculados.

Todas las integrales que quedan son inmediatas:

$$\int \frac{1}{x-s}\,dx = \cdots$$

$$\int \frac{1}{(x-t)^6}\,dx = \cdots$$

$$\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}\,dx = \cdots \quad (\ln + \operatorname{arctg})$$

Ejemplos y ejercicios

Calcular los coef.

a) Sólo simples

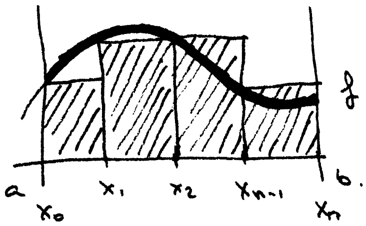
b) Sólo reales

c) Todo junto (poniendo polinomios como $x^4 - 1$)

d) Dividiendo

3. Integral de Cauchy

Definición de integral definida



Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Se divide $[a,b]$ en n partes iguales

Cada una tiene anchura $h = \frac{b-a}{n}$ (paso)

Llamamos $x_0 = a$; $x_1 = a+h$; ... ; $x_i = a+ih$; ..., $x_n = b$

Se define $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot h$

Integral definida de f entre a y b es: $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S_n$

Notación física $\to$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, h = \int_a^b f(x)\, dx$ [Expl. intuitiva]

a: lím. inf. de integración b: lím. sup. integración.

Regla de Barrow

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva.

Entonces $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

Notación

$$F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big]_a^b$$

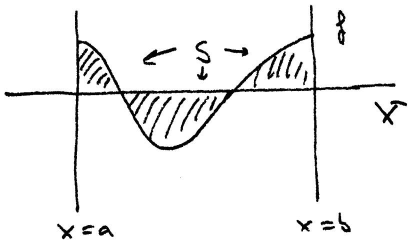
Consecuencia

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\Big]_a^b$$

4. Cálculo de áreas

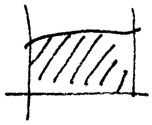
Área determinada por la gráfica de una función, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

Se trata de calcular



, de modo que supondremos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua. [Intentar calcularlo de un tirón]

a) $f > 0$



$f(x) > 0 \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\, h > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \int_a^b f > 0$

$S = \int_a^b f$ (intuitivamente, por la definición de integr. definida)

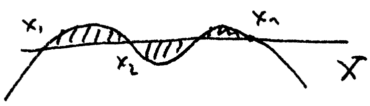
b) $f < 0$ (...) $S = -\int_a^b f$

c) Caso general

$f(x) = 0 \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n \in [a, b]$

$$S = \left| \int_a^{x_1} f \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^{b} f \right|$$

d) Caso particular: área det. por la gráfica de una función g el eje de abscisas

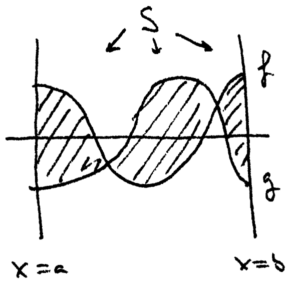


$f(x) = 0 \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n$

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \right|$$

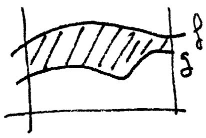
Área determinada por las gráficas de dos funciones y dos rectas verticales

Se trata de calcular



, de modo que suponderemos que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas

a) $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq g(x) \geq 0$



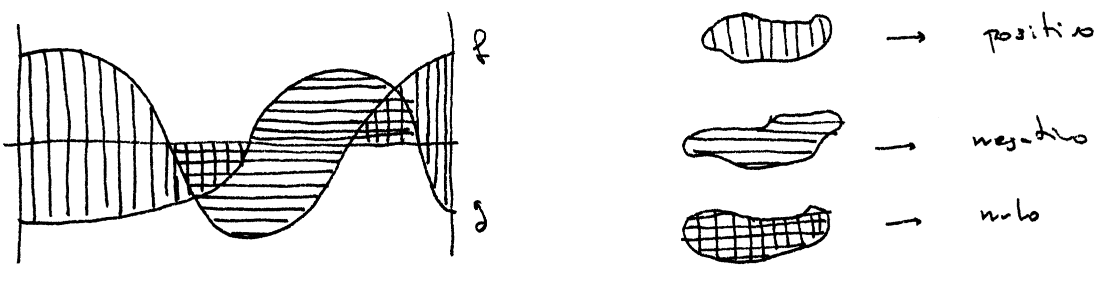
$$S = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$$

Si es necesario, se puede dem. con la regla de B. o con la def.

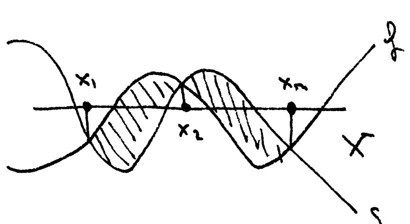
b) Caso general.

$f(x) = g(x) \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

$$S = \left| \int_a^{x_1} (f-g) \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f-g) \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^{b} (f-g) \right| .$$ Justificación



c) Caso particular: área det. por dos funciones



$f(x) = g(x) \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n$

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f-g) \right|$$

CI - P1

Area OX, f

$$\frac{2}{x^2+1} - 1$$

$$x(x^2+ax+c)$$

Area entre dos fun.

x^n, x^m // e^x, e^{-x}, $x=0$, $x=1$ // $y=x^3$, $xy=1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$

Integrales

Hallar f dando $f^{(n}$ y condiciones iniciales

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1} \qquad \left(\tan\frac{x}{2} = t\right)$$