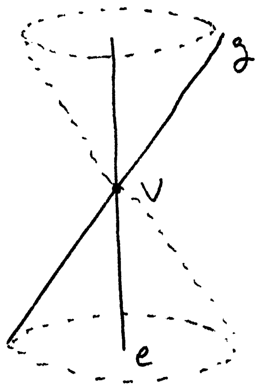
CN 1

Cónicas

1. Generalidades

Superficie cónica



Es la que se obtiene al girar una recta g (generatriz) respecto a una recta secante e (eje)

El punto de corte de g y e se llama vértice (V) de la superficie

Definición

Cónica es cualquier curva obtenida al cortar una superficie cónica con un plano. Si el plano pasa por el vértice de la sup. cónica, la cónica resultante recibe el nombre de cónica degenerada.

Tipos de cónica (pg. 113)

Sean $\alpha = \measuredangle(e, g)$, $\beta = \measuredangle(e, \pi)$

a) $\alpha < \beta$ Elipse

Caso particular : $\beta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ circunferencia

b) $\alpha = \beta$ Parábola

c) $\alpha > \beta$ Hipérbola

Las degeneradas, como ejercicio

Ecuaciones de una cónica

En el plano Π podemos elegir dos ejes de coordenadas y entonces los puntos de la cónica y sólo ellos verifican una ecuación, que siempre es de la forma

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

con $a \neq 0$ ó $b \neq 0$ ó $c \neq 0$

Como suele ser en general bastante complicada, conviene elegir los ejes de modo que sean cero el mayor número de coeficientes que sea posible. La ecuación que se obtenga se llama ecuación reducida, que toma distinta expresión según la cónica.

Pos. relativa de cónica y recta

Una cónica y una recta pueden ser:

Exteriores : ningún punto de contacto
Tangentes : un punto de contacto y la recta no atraviesa la cónica.
Secantes : dos puntos de contacto o uno en el que la recta atraviesa la cónica.

Tangente a una cónica por un punto de ella

[Recordar de segundo la def. de derivada, la derivada en forma explícita y en forma implícita]

Sea C una cónica y $P = (p_1, p_2) \in C$

CN3

La tangente a C en P es $y = mx + g$, bastando hallar m, que es y'_P; para calcular y'_P hay dos métodos:

a) Despejar "y" de la ecuación de la cónica y derivar en forma explícita. Esto no siempre es posible y a veces hay que decidir entre dos expresiones de "y"

b) Derivar la ecuación de la cónica en forma implícita, sustituir el punto y despejar "y'". Es lo más sencillo

Ejemplos

2. La circunferencia

Lugar geométrico

Es un conjunto de puntos que verifican alguna condición geométrica

Circunferencia

Es l. g. de los puntos del plano que equidistan de otro llamado centro

Ecuación general

Sea C una circunferencia de centro $T=(a,b)$ que dista de todos los puntos de C la distancia R llamada radio.

Entonces $P \in C \Leftrightarrow d(T,P)=R$.

$$d(T,P)=R \Rightarrow \dots \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \equiv x^2+y^2+(-2a)x+(-2b)y+(a^2+b^2-R^2)=0$$

$$\text{Coef}(x^2)=\text{Coef}(y^2) \wedge \text{Coef}(xy)=0$$

Ecuación reducida

Eligiendo los ejes de modo que $T=O=(0,0)$, queda $x^2+y^2=R^2$

Ejemplos

a) Dado T y R, hallar C

b) Dada la ec., hallar T y R

3. La elipse

Definición

Es el l. g. de los p. del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

[Al dibujarla ver que $d(F,F') < K$]

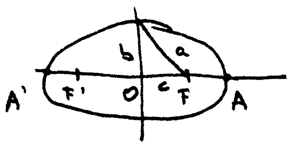
Ecuación general

Como ejemplo, obtener la ec. de la elipse de focos $(-2,0)$ y $(1,1)$ y $K = 4$

Sea $P = (x,y) \in$ elipse, $F = (1,1)$, $F' = (-2,0)$

$d(F,P) + d(F',P) = 4 \Rightarrow \dots \Rightarrow$

Elementos de una elipse



Simetrías

$K = 2a =$ eje mayor (ya que $A \in$ elipse)

a: semieje mayor

$d(F,F') =$ dist. focal $= 2c$

c: semieje focal.

O: centro de la elipse

$2b$: eje menor

b: semieje menor

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$; $c \leq a \Rightarrow e \leq 1$

$e = 1 \Rightarrow c = a \Rightarrow$ Elipse $= \overline{AA'}$

$e = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow F = F' \Rightarrow$ Elipse $=$ circunf. de centro F y radio a

$a^2 = b^2 + c^2$

Radios vectores: $\vec{r} = \overline{PF}$, $\vec{r}' = \overline{PF'}$

CN 6

Ecuación reducida

Eligiendo los ejes de modo que $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$, se obtiene

$$d(F, P) + d(F', P) = 2a \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pos. rel. de elipse y recta

2 puntos de corte → secantes
1 punto de corte → tangentes
0 puntos de corte → exteriores

4. La hipèrbola

Definición

Es el l.g. de los p. del plano cuya diferencia de distancias a dos punto fijos llamado foco es constante

[Al dibujarla ver que $d(F,F') > K$]

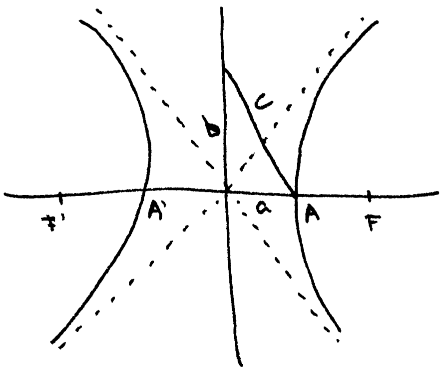
Ecuación general

Como ejemplo, obtener la ec de la hip. de focos $(-2,0)$ y $(1,1)$ y $K = 2$

Sea $P = (x,y) \in$ hip. , $F = (1,1)$, $F' = (-2,0)$

$d(F,P) - d(F',P) = 2 \Rightarrow \dots \Rightarrow$

Elementos de la hipérbola



Simetrías

$K = 2a$ = eje mayor (ya que $A \in$ hip.)

a : semieje mayor

$d(F,F')$ = dist. focal $= 2c$

c : semidistancia focal

O : centro de la hip.

$2b$: eje menor

¿Orden?

b : semieje menor

Excentricidad : $e = \frac{c}{a}$; $c \geq a \Rightarrow e \geq 1$

$e = 1 \Rightarrow c = a \Rightarrow$ hip $= \mathbb{R} - (\overline{FF'})$

$c^2 = a^2 + b^2$

Radios vectores $\vec{r} = \overline{PF}$, $\vec{r}' = \overline{PF'}$

Rectas asíntotas

Ecuación reducida

Eligiendo los ejes de modo que $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$, se obtiene

$$d(F, P) - d(F', P) = 2a \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ec. de las asíntotas

$y = \frac{b}{a}x \wedge y = -\frac{b}{a}x$

Posición relativa de hip. y recta

2 puntos de corte → secante

1 punto de corte y $r \parallel$ asint. → secante

" $\nparallel$ → tangente

0 puntos de corte → exterior

Hipérbola equilátera

Es aquella en la que $a = b$

Como las asíntotas son perpendiculares, se pueden tomar como ejes y entonces la ecuación de la hipérbola queda $xy = K$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

$$d((x,y), \text{asint.}) \cdot d((x,y), \text{asint.}') = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} = \frac{|x^2-y^2|}{2} = \frac{a^2}{2} = K$$

5. La parábola

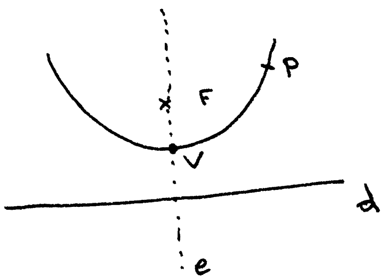
Definición

Es el l.g. de los puntos del plano que equidistan de una recta llamada directriz y un punto llamado foco

Ecuación general

[Sacar una como ejemplo] No tiene interés

Elementos de la parábola



$d(F, d) = p$ = parámetro de la parábola

eje $\equiv e$: perpendicular a d por F

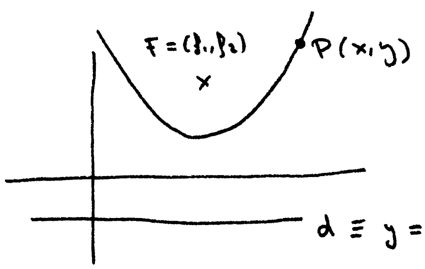
(es eje de simetría)

Vértice : V : intersección del eje y la par.

Radio vector : $\overrightarrow{FP}$

Ecuación más usada

1. Si $e \parallel OY$



$d \equiv y = q \equiv y - q = 0$

$$d(F, P) = d(P, d) \Rightarrow \ldots \Rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

2. Si $e \parallel OX \Rightarrow x = ay^2 + by + c$

Ecuación reducida

Se elijen los ejes de modo que $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$, $d \equiv y = -\frac{p}{2}$

$$d(P, d) = d(P, F) \Rightarrow \dots \Rightarrow y = \frac{1}{2p} x^2$$

Posición relativa de recta y pr.:

2 puntos de corte : secante

1 punto de corte y $r \parallel e$: secante

1 " y $r \nparallel e$: tangente

0 " : exterior

CN - P1

Problemas generales sobre circunferencia

* Ec. circunf. que pase por tres puntos
* " " dado el centro y una recta tg.
* " " que pasa por dos puntos y tiene el centro en r

Interesante

Ec. de la tg. a una circunf. por un punto exterior

Hallar los vértices de un triángulo equilátero inscrito a $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{5}} = 1$

sabiendo que uno de ellos es el vértice A

Hallar la long. de la cuerda interceptada por $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ sobre

la hip. $3x^2 - 8y^2 = 9$ (Solución: 5)