# Geometría

## 1. Vectores

Ⓔ Diferencia entre magnitudes escalares y vectoriales

### Definición de $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R} \to$ conj. de los núm. reales

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ \underset{\text{par}}{(x,y)} \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \} = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$ (El plano)

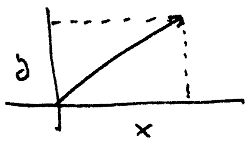
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \{ ((x,y),z) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge z \in \mathbb{R} \} = \{ \underset{\text{terna}}{(x,y,z)} \mid x,y,z \in \mathbb{R} \}$.
(El espacio)

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \{ \underset{\text{enupla}}{(x_1, \dots, x_n)} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$. (Espacio n-dimensional)

Vamos a estudiar geométricamente $\mathbb{R}^2$; a sus elementos los llamaremos vectores

### Representación gráfica

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$

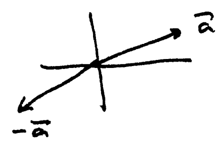



Se suele escribir $\vec{v} = (x,y)$

### Definiciones

1. Vector nulo o vector cero : $\vec{0} = (0,0)$

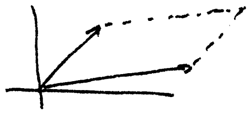
2. Vector opuesto de $\vec{a} = (x,y)$ : $-\vec{a} = (-x,-y)$



## Suma de vectores

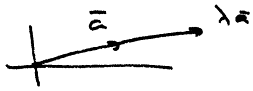
Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, definimos $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

Gráficamente es la regla del paralelogramo



## Producto de un escalar y un vector

Si $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$




## Proporcionalidad de vectores

Dos vectores $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ se dice que son proporcionales o múltiplos

cuando $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{a} = \lambda\vec{b}$

¿Cómo saber rápidamente si $(a,b)$ y $(x,y)$ lo son?

Si $a = 0$, debe ser $x = 0$

Si $b = 0$, debe ser $y = 0$

Si $a \neq 0 \neq b$, debe ser $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

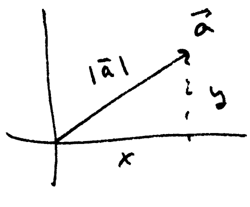
## Producto escalar

Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$, se define

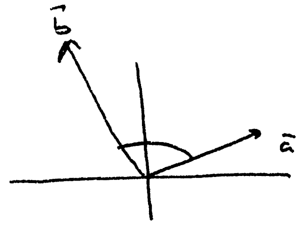
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_1$$

## Módulo de un vector

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad ; \quad |\vec{a}| = |(x,y)| = \sqrt{(x,y) \cdot (x,y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



## Ángulo entre dos vectores

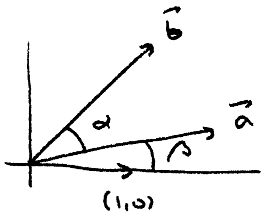



Si $\vec a, \vec b \neq \vec 0$, forman un ángulo que se escribe $\measuredangle(\vec a, \vec b)$ o $(\widehat{\vec a, \vec b})$ y siempre se toma en el intervalo $[0, \pi]$

## Proposición

Sean $\vec a, \vec b \in \mathbb{R}^2 - \{\vec 0\}$. Entonces $\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\,|\vec b| \cos(\widehat{\vec a, \vec b})$

Demostración




Llamemos $\vec a = (a_1, a_2)$, $\vec b = (b_1, b_2)$

$\alpha = (\widehat{\vec a, \vec b})$, $\beta = (\widehat{\vec a, (1,0)})$

$$\cos\alpha = \cos((\alpha+\beta)-\beta) = \cos(\alpha+\beta)\cos\beta + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\beta =$$

$$= \frac{b_1}{|\vec b|}\cdot\frac{a_1}{|\vec a|} + \frac{b_2}{|\vec b|}\cdot\frac{a_2}{|\vec a|} = \frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|} \Rightarrow \vec a\vec b = |\vec a||\vec b|\cos(\widehat{\vec a, \vec b})$$

## Definición de ortogonalidad

Dos vectores $\vec a, \vec b \in \mathbb{R}^2 - \{\vec 0\}$ se dice que son ortogonales o perpendiculares cuando $\vec a \cdot \vec b = 0$, y se escribe $\vec a \perp \vec b$

Evidentemente $\vec a \perp \vec b \Leftrightarrow \measuredangle(\vec a, \vec b) = \frac{\pi}{2}$

## Problema práctico

Dado un vector hallar rápidamente otro cualquiera perpendicular a él

Si nos dan $(a,b)$, buscamos $(x,y)$ de modo que

$(a,b)(x,y) = 0 \Rightarrow ax + by = 0$. Podemos tomar $x = b,\ y = -a$
$x = -b,\ y = a$

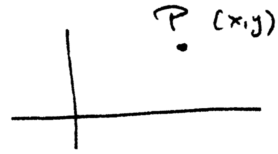
$(a,b) \to (b,-a)$ y cualquier vector proporcional a $(b,-a)$

nos vale, ya que

$$(a,b)\cdot(\lambda(-b,a)) = \ldots = 0$$

## 2. Puntos

Ahora vamos a considerar $\mathbb{R}^2$ también como el conjunto de puntos del plano: $\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$




Utilizaremos simultáneamente las dos interpretaciones de $\mathbb{R}^2$: como conjunto de puntos y como conjunto de vectores.

Los puntos los denotaremos con letras mayúsculas y los vectores con minúsculas con flechas

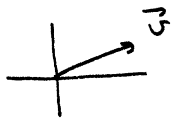
### Suma de punto y vector

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

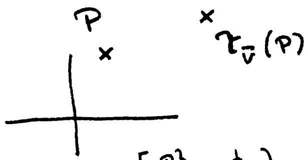
Definimos la "Traslación de vector $\vec{v}$": $\tau_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$P = (p_1, p_2) \longrightarrow (p_1 + v_1 , p_2 + v_2)$$

Gráficamente



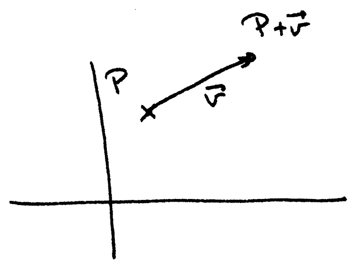

$[\mathbb{R}^2$ vectores$]$




$[\mathbb{R}^2$ puntos$]$

Se suele escribir $P + \vec{v}$ en vez de $\tau_{\vec{v}}(P)$, así que el resultado práctico es:

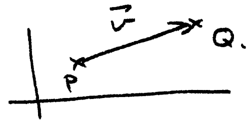
$$\left. \begin{array}{l} P = (p_1, p_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{array} \right\} \Rightarrow P + \vec{v} = (p_1 + v_1 , p_2 + v_2)$$




$[\mathbb{R}^2$ mogollón$]$

## Proposición

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2 \ \exists!\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid Q = P + \vec{v}$$




### Demostración

$P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$. Hipotético $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$Q = P + \vec{v} \Rightarrow (q_1, q_2) = (p_1, p_2) + (v_1, v_2) \Rightarrow \dots \Rightarrow (v_1, v_2) =$$

$$= (q_1 - p_1, q_2 - p_2),$$ que efectivamente existe y es único.

## Vector que une dos puntos

Dados $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ se define

"Vector que une $P$ y $Q$" $= \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$

[Coordenadas del extremo menos coordenadas del origen]

## Propiedades

1. $A + \overrightarrow{AB} = B$
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(Demostrar sólo visualmente)

## Distancia entre dos puntos

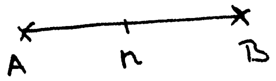
$d(R, S) = |\overrightarrow{RS}|$, luego $d((r_1, r_2), (s_1, s_2)) = \sqrt{(s_1 - r_1)^2 + (s_2 - r_2)^2}$

Ejercicios

a) Encontrar vértices de figuras

b) Clasificar triángulos

## Punto medio de un segmento




$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M = \left( \frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2} \right)$$

Ejercicios

a) Puntos que dividen un segmento en un número de partes especificado

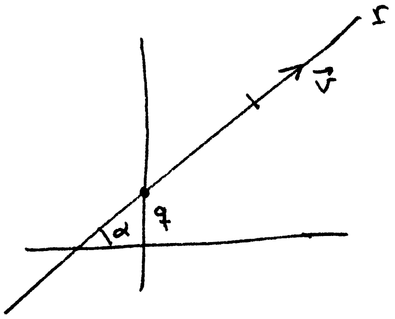
b) Longitud de medianas

c) Baricentro de un triángulo

etc...

# 3. Rectas

## Conceptos básicos




Sea r una recta.

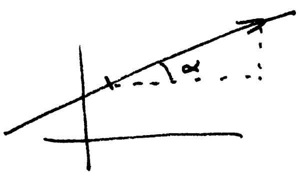
Pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje positivo de abscisas : $m = tg\, \alpha$

Ordenada en el origen es la ordenada del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas

Vector de dirección es cualquier vector que tenga la misma dirección que la recta. (Le llamaremos $\vec{v_r}$ )

$A, B \in r \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ es v.d.

Cualquier múltiplo de un v.d. lo es también




Si $(v_1, v_2)$ es v.d. , $m = \dfrac{v_2}{v_1}$

## Ecuaciones de una recta

Dados un punto y una recta es necesario saber si el punto pertenece a la recta o no. Las ecuaciones de una recta son expresiones que permiten decidir la pertenencia o no del punto a la recta.

Sea $r$ la recta que pasa por $H = (h_1, h_2)$ y tiene v.d. $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera

$P \in r \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid P = H + \lambda \vec{v}$, por lo que a $P = H + \lambda \vec{v}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ se le llama ecuación vectorial

A veces se usan otras ecuaciones vectoriales, que son equivalentes:

$$\vec{HP} = \lambda \vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad ; \quad \vec{OP} = \vec{OH} + \lambda \vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$P = H + \lambda \vec{v} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = h_1 + \lambda v_1 \\ y = h_2 + \lambda v_2 \end{array} \right. \quad \text{(Ecuaciones paramétricas)}$$

Quitando el parámetro: $ax + by + c = 0$ (Ecuación implícita)

Despejando "y": $y = mx + q$ (Ecuación explícita)

Ejemplo

a) Sacar las ec. a partir de $H$ y $\vec{v}$

b) Decidir si puntos pertenecen o no

c) Obtener puntos a partir de la ec.

d) Encontrar el punto de corte de dos rectas

Casos particulares

a) Rectas paralelas al eje de abscisas.

$\vec{v} = (1, 0)$, $m = 0$

Si pasa por $H = (0, q)$, la ecuación es $y = q$

b) Rectas paralela al eje de ordenadas

$\vec{v} = (0, 1)$, "$m = \infty$"

Si pasa por $H = (g, 0)$, la ec. es $x = g$

## Vector perpendicular a una recta

Un vector es perpendicular a una recta cuando es perpendicular a sus v.d.

Sea $r \equiv ax+by+c=0$ una recta y $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2) \in r$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \in r \Rightarrow ax_1+by_1+c=0 \\ P_2 \in r \Rightarrow ax_2+by_2+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0 \Rightarrow (a,b) \perp \overrightarrow{P_1P_2} \Rightarrow (a,b) \perp$$

También se llama vector normal a r. Le llamaremos $\vec{n}_r$

### Ejercicio

a) Dado un punto y v.d, hallar implícita

b) Dada la implícita, hallar v.d.

c) Dada $\underset{\text{impl}}{r}$ y P, hallar la paralela y la perpendicular

## Cálculo de la pendiente

1. Conocida la explícita. Es el coeficiente de "x"

2. Conocida la implícita, $ax+by+c=0$

   i) $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \Rightarrow m=-\frac{a}{b}$

   ii) $(a,b)\perp r \Rightarrow (b,-a)$ v.d. $\Rightarrow m=-\frac{a}{b}$.

3. Conocidas las paramétricas

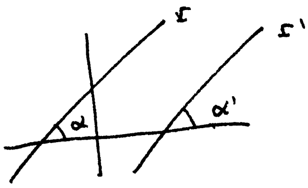
4. Conocidos dos puntos

### Ejercicio

a) Dados dos puntos, hallar la explícita

## Paralelismo entre rectas

Dos rectas son paralelas cuando lo son sus vectores de dirección, e.d., cuando son proporcionales




$\alpha = \alpha' \Rightarrow m = m'$

## Perpendicularidad entre rectas

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus v. d.

$r \perp s \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \quad [\Leftrightarrow \vec{n}_r \perp \vec{n}_s]$

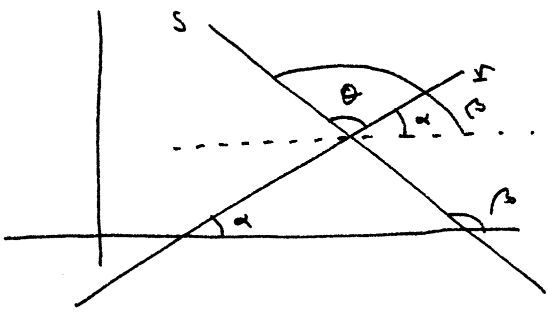
$r \perp r' \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (v_1, v_2) \\ \vec{v}_{r'} = (v_2, -v_1) \end{cases} \Rightarrow m_r \cdot m_{r'} = \frac{v_2}{v_1}\left(-\frac{v_1}{v_2}\right) = -1$

Ejercicio

Dada r (expl.) y P, hallar la paralela y la perpendicular

## Ángulo entre dos rectas

Se define como $\measuredangle(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$ y coincide con $\measuredangle(\vec{n}_r, \vec{n}_s)$




2. $\theta = \beta - \alpha \Rightarrow tg\,\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}$

1. $\theta = \beta - \alpha \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} m_s - \operatorname{arctg} m_r$

En principio $\measuredangle(r, s) = \measuredangle(s, r)$, pero a veces es necesario distinguir el signo. Las fórmulas 1 y 2 lo hacen, pero la definición no

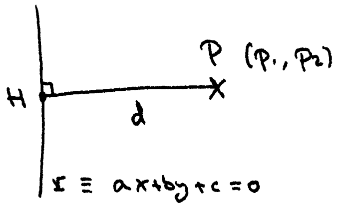
## Ejercicios

a) Calcular ángulo entre dos rectas

b) Dada $r$, $\theta$, $P$, hallar otra recta $s$ que pase por $P$ y forme ángulo $\theta$

c) Dem. condición de paralelismo y perpendicularidad.

## Distancia de un punto a una recta




$d = d(P, H)$

$(a,b) \perp r \Rightarrow (a,b)$ v.d. de $r(P,H)$

$H \in r(P,H) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid H = P + \lambda(a,b)$

Luego $H = (p_1, p_2) + \lambda(a,b) = (p_1 + \lambda a, p_2 + \lambda b)$

$H \in r \Rightarrow a(ap_1 + \lambda a) + b(p_2 + \lambda b) + c = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{ap_1 + bp_2 + c}{a^2+b^2}$

$$d(P,H) = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = |\lambda| \sqrt{a^2+b^2}$$

$$d = \left| -\frac{ap_1 + bp_2 + c}{a^2+b^2} \right| \sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

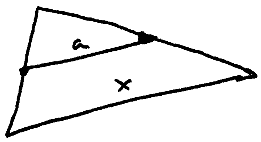
## Ejercicio

Hallar la bisectriz de un ángulo

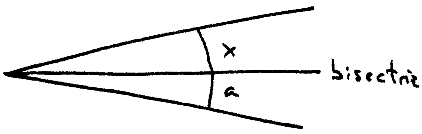
GM -P

# Geometría clásica

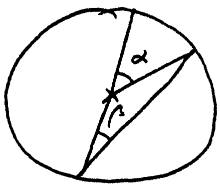
Al unir los puntos medios de un cuadrilátero, se obtiene un paral.



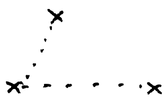

$x = 2a$




$x = a$

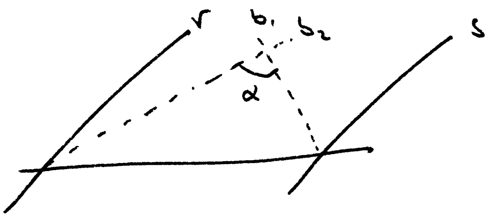



$\alpha = 2\beta$



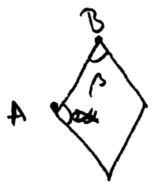
Hallar el cuarto vértice del paralelogramo

Dividir un segmento en n partes




$r \parallel s \wedge b_1 \wedge b_2$ bisectrices

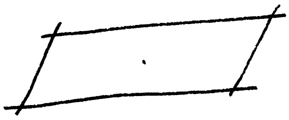
$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$



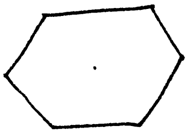

Rombo | $\alpha = 2\beta$. Dados A y B, dibujar el rombo

GM - P

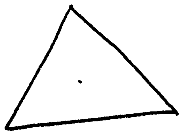
# Puntos y vectores



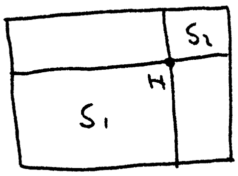
Distintos datos



Dados 3 vértices consecutivos, hallar el resto (calculando el centro o no)



$A \wedge G \Rightarrow B \wedge C$ (equilátero)




$S_1 = 4 S_2$. Hallar $H$

GM - P

# Generales

Tremenda pasada triangular

Dada una ecuación, hallar puntos, vect. directores y normales.

Ecuación normal o canónica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Hallar K sabiendo que $(-3,1)$, $(K,K+1)$ y $(9,4)$ están alineados

Perímetro y área de un triángulo conocidas las ec. de los lados

El incentro del $\triangle$ de vértices $(-1,2)$, $(11,-7)$ y $(23,9)$ es $(10,0)$

(Gn - P)

Interesantes

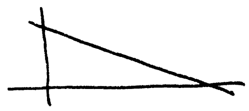
A, B, r. Hallar $P \in r$ tal que

a) $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$

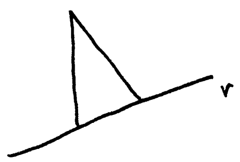
b) $\widehat{ABP}$ isósceles

c) $\widehat{ABP}$ equilátero

A, B. Hallar $C \in \mathbb{R}^2 \mid \widehat{ABC}$ equilátero



Áreas y puntos




Dados A y B (cualesquiera) y r. Isósceles
Hallar C

□ Un vértice y una diagonal conocida. Hallar los demás vértices

△ isósceles. Lado desigual, un vértice, superficie. Hallar vértices

Vértices de un cuadrado de sup. $9u^2$, lados $\parallel$ a los ejes, un vértice en $y = x + 2$ y otro en $2x + y - 8 = 0$ (muchas soluciones)

Hallar el área de un exágono que tiene dos lados en las rectas $x - 2y + 1 = 0$ y $x - 2y + 9 = 0$

Tercero de B.U.P.    Grupo "A"    Matemáticas

Hoja de problemas    X. 10. 10. 1990

Tema: [A] Geometría analítica

(*) Realizar las siguientes operaciones (si son posibles), indicando si el resultado es un número, un vector, o un punto. Usa estos datos:

$A = (-2,3)$, $B = (4,1)$, $C = (-1,2)$, $\vec{u} = (3,1)$, $\vec{v} = (2,-3)$ [$\underline{\underline{2}}$ decimales]

1. $C + \vec{AB}$
2. $(P + \vec{u}) + 2\vec{v}$
3. $|\vec{u}| + 3$
4. $d(A,C) + |2\vec{BC}|$
5. $d(A,\vec{u}) + |\vec{v}|$
6. $|\vec{u}+\vec{v}| + |A|$
7. $d(A, B+\vec{u}) - \vec{v}\cdot\vec{BC}$
8. $|\overrightarrow{(A-\vec{v})(B-\frac{1}{2}\vec{BA})}|$

(*) Resolver las siguientes ecuaciones [2 decimales]

9. $x = |(\sqrt{2},\sqrt{3})|$
10. $2 = |(x,1)|$
11. $7 = |(x,x)|$
12. $d((8,3),(1,x)) = 6$
13. $(4,x)\cdot(-1,5) = 4$

14. Encontrar las ecuaciones vectorial, paramétricas, implícita y explícita de la recta $r$ que pasa por el punto $(5,3) = A$ y tiene vector de dirección $\vec{v} = (-1,3)$

15. ¿Qué ecuación tiene la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto $Z = (3,4)$?

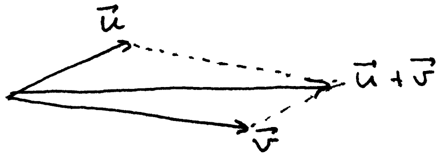
Tercero de B.U.P.   Grupo "A"   Matemáticas

Hoja de teoría   X.10.10.1990

Tema: Operaciones con vectores y puntos

## SUMA DE VECTORES

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$$




vector + vector → vector

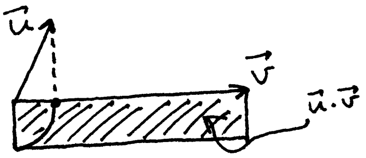
## PRODUCTO DE UN ESCALAR Y UN VECTOR

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\in\mathbb{R}\\ \vec{u}=(u_1,u_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\vec{u}=(\alpha u_1,\alpha u_2)$$


número . vector → vector

## PRODUCTO ESCALAR

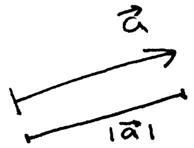
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2$$




vector . vector → número

## MÓDULO DE UN VECTOR

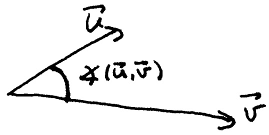
$$\vec{a}=(a_1,a_2)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$




|vector| → número

## ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

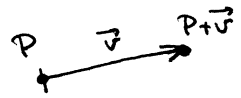
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle(\vec{u},\vec{v})=\arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$




$\measuredangle$ (vector, vector) → número

## SUMA DE PUNTO Y VECTOR

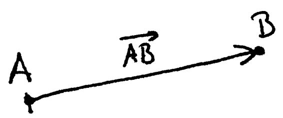
$$\left.\begin{array}{l}P=(p_1,p_2)\\ \vec{v}=(v_1,v_2)\end{array}\right\} \Rightarrow P+\vec{v}=(p_1+v_1,p_2+v_2)$$




punto + vector → punto

## VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS

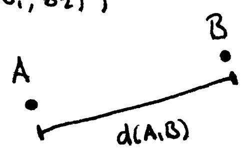
$$\left.\begin{array}{l}A=(a_1,a_2)\\ B=(b_1,b_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$$




$\overrightarrow{\text{punto punto}}$ → vector

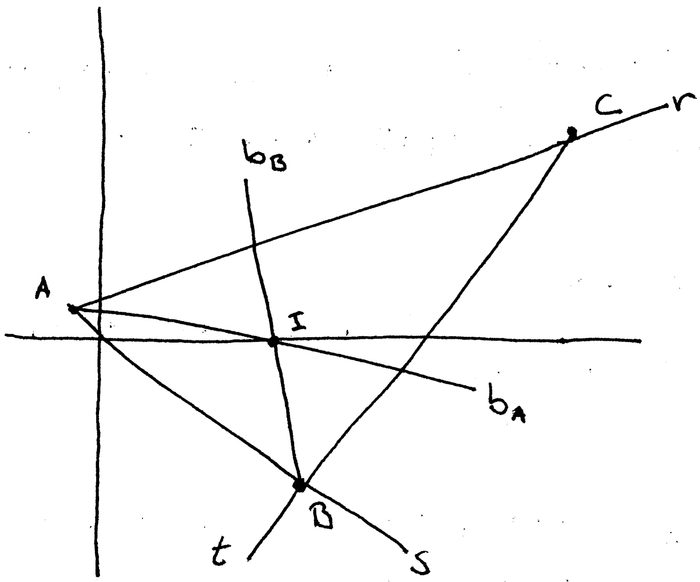
## DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

$$\left.\begin{array}{l}A=(a_1,a_2)\\ B=(b_1,b_2)\end{array}\right\} \Rightarrow d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$




d(punto, punto) → número

Demostrar que el incentro del triángulo de vértices $A=(-1,2)$, $B=(11,-7)$ y $C=(23,9)$ es $(10,0)$




$b_A$

$$\vec{AC} = (24,7) \Rightarrow \vec{n}_r = (7,-24) \Rightarrow r \equiv 7x-24y+55=0$$

$$\vec{AB} = (12,-9) \Rightarrow \vec{n}_s = (9,12) \rightarrow (3,4) \Rightarrow s \equiv 3x+4y-5=0$$

$$d(P,r) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|7x-24y+55|}{25} = \frac{|3x+4y-5|}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x-24y+55 = 5(3x+4y-5) \Rightarrow 8x+44y-80=0 \\ 7x-24y+55 = -5(3x+4y-5) \Rightarrow 22x-4y+30=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{A1} \equiv 2x+11y-20=0 \\ b_{A2} \equiv 11x-2y+15=0 \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{l} (2x+11y-20)_C = 125>0 \\ (2x+11y-20)_B = -75<0 \end{array} \right\} \Rightarrow b_A = b_{A1} \Rightarrow b_A \equiv 2x+11y-20=0$$

$$\left[ \begin{array}{l} m_r = \frac{7}{24} \Rightarrow \alpha_r \simeq 16^\circ \\ m_s = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha_s \simeq -37^\circ \\ m_{bA1} = -\frac{2}{11} \Rightarrow \alpha_{bA1} \simeq -10^\circ \\ m_{bA2} = \frac{11}{2} \Rightarrow \alpha_{bA2} \simeq 80^\circ \end{array} \right. \Rightarrow b_A = b_{A1}$$

$b_B)$

$$\vec{BC} = (12,16) \Rightarrow \vec{n_t} = (4,-3) \Rightarrow t \equiv 4x-3y-65=0$$

$$d(P,t) = d(P,s) \Rightarrow \frac{|4x-3y-65|}{5} = \frac{|3x+4y-5|}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x-3y-65 = 3x+4y-5 & \Rightarrow b_{B1} \equiv x-7y-60=0 \\ 4x-3y-65 = -3x-4y+5 & \Rightarrow b_{B2} \equiv 7x+y-70=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x-7y-60)_A = -75 < 0 \\ (x-7y-60)_C = -100 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b_B = b_{B2} \Rightarrow b_B \equiv 7x+y-70=0$$

$I)$

$$I = b_A \cap b_B \Rightarrow \begin{cases} 2x+11y-20=0 \\ 7x+y-70=0 \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} 2x+11(-7x+70)-20 \Rightarrow \\ y = -7x+70 \end{array}$$

$$\Rightarrow -75x = -750 \Rightarrow x=10 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \boxed{I = (10,0)}$$

Tercero de B.U.P.   Grupo "A"   Matemáticas

Hoja de problemas   L. 29. 10. 1990

Tema: [A3] Ecuaciones de las rectas

(1) Siendo $r \equiv 5x - 3y + 4 = 0$, hallar la ecuación explícita y la pendiente

(2) " $r \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$, " " " implícita y $\vec{n}_r$

(3) " $r \equiv 4x + y + 1 = 0$, " las ecuaciones paramétricas

(4) " $r \equiv y = \frac{2}{3}x + 1$, " " " "

(5) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos

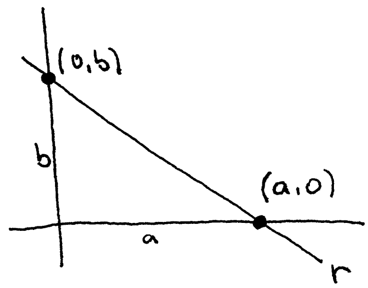
$A = (5,2)$ y $B = (-2,3)$

(6) **Fórmula punto - pendiente**

Demostrar que si la recta $r$ pasa por el punto $P = (x_0, y_0)$ y tiene pendiente "$m$", entonces $\boxed{r \equiv y - y_0 = m(x - x_0)}$

(7) **Ecuación canónica o normal**

Demostrar que si la recta $r$ pasa por los puntos $A = (a,0)$ y $B = (0,b)$, entonces $\boxed{r \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$




(8) Hallar el punto de corte de las rectas

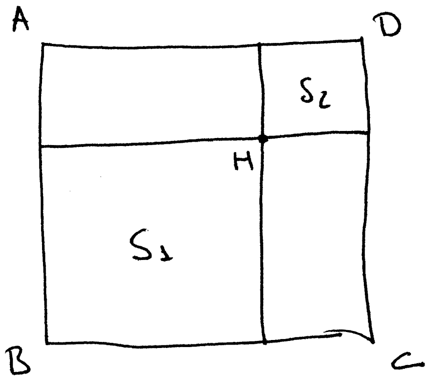
$r \equiv 2x + 3y - 4 = 0$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$

Tercero de B.U.P. Grupo "A" Matemáticas

Ex. de subir nota (1ª ev.) M. 20. 11. 1990

Temas: [A1, A2] Vectores y puntos

1. El triángulo $\widehat{ABC}$ tiene el baricentro en G. Los puntos medios de los lados del $\widehat{ABC}$ definen otro triángulo más pequeño. Demostrar que su baricentro también es G

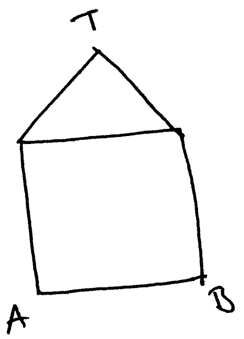
2. 


$S_1 = 4S_2$

$A = (-3,4)$, $C = (-3,-2)$

$B = (-6,1)$

Hallar H

3. 


Explicar métodos para calcular T conocidos A y B

# Matemáticas Tercero de B.U.P. Curso 1991-92

**Hoja de problemas.** ***Parte C : Geometría.*** **Fecha: L.10.2.1992**

$A = (-1,3)$; $B = (2,0)$; $C = (1,1)$; $\bar{u} = (-3,-4)$; $\bar{v} = (2,-1)$

Realizar las operaciones que se indican a continuación con los datos presentados más arriba, teniendo en cuenta que si la operación no se puede realizar, hay que explicar claramente por qué y si es posible realizarla, hay que indicar si el resultado es un número, un vector o un punto.

[1] $d(A, B+2\bar{u})$

[2] $|\bar{v}| - \bar{u} \cdot \overline{AB}$

[3] $d(\bar{u}, 2\bar{v})$

[4] $\overline{AC} + 3\bar{v} - 2\overline{BA}$

[5] $(B+3\bar{v}) + (\bar{u} - \overline{AB})$

[6] $\measuredangle(\bar{u}, \overline{BC})$

[7] $\measuredangle(A+\bar{u}, \bar{v})$

[8] $|\overline{A(B+u)}|$

[9] $|\bar{u}-\bar{v}| + \measuredangle(\overline{AB}, \overline{AC})$

# Matemáticas Tercero de B.U.P. Curso 1991-92

**Hoja de teoría.** ***Parte C : Geometría.*** **Fecha: L.10.2.1992**

## Clasificación de triángulos

Los triángulos se pueden clasificar atendiendo a sus lados o atendiendo a sus ángulos.

### Por sus lados

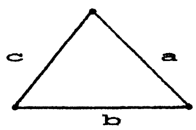
| | |
|---|---|
| **Escaleno** | Tiene los tres lados distintos |
| **Isósceles** | Tiene dos lados iguales |
| **Equilátero** | Tiene los tres lados iguales |

### Por sus ángulos

| | |
|---|---|
| **Acutángulo** | Tiene los tres ángulos agudos |
| **Rectángulo** | Tiene un ángulo recto |
| **Obtusángulo** | Tiene un ángulo obtuso |

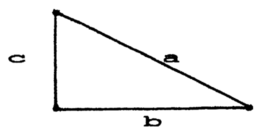
Conocidos los tres lados de un triángulo es posible clasificarlo por sus ángulos utilizando el siguiente criterio:
Llamando "a" al lado mayor y "b" y "c" a los otros dos, se verifica:

Acutángulo



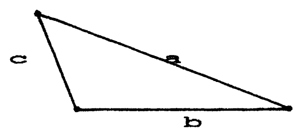

$a^2 < b^2 + c^2$

Rectángulo




$a^2 = b^2 + c^2$

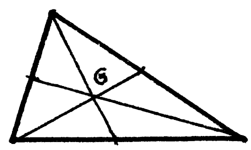
Obtusángulo




$a^2 > b^2 + c^2$

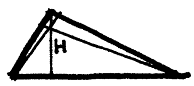
### Medianas

Son segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. Se cortan en el ***BARICENTRO***, que es el centro de masas del triángulo y dista dos tercios del vértice y un tercio del punto medio.



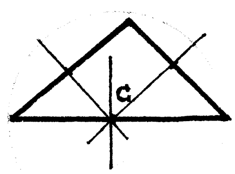

### Alturas

Son segmentos que unen perpendicularmente cada vértice con el lado opuesto (o su prolongación). Se cortan en el ***ORTOCENTRO***.




### Mediatrices

Son rectas perpendiculares a cada lado por su punto medio. Se cortan en el ***CIRCUNCENTRO***, que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.




### Bisectrices

Son las bisectrices de los ángulos. Se cortan en el ***INCENTRO***, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.