Números complejos

Introducción

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$ Comprobarlo

$\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}\,x + 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{3} + \sqrt{-1} \\ \sqrt{3} - \sqrt{-1} \end{cases}$ "comprobarlo"

Si pudiéramos operar con $\sqrt{-1}$, podríamos resolver cualquier ecuación de segundo grado, p. ej.: $x^2 - 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 + 3\sqrt{-1} \\ 1 - 3\sqrt{-1} \end{cases}$

Por tanto, nos interesa dar un sentido a estos números de la forma $a + b\sqrt{-1}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

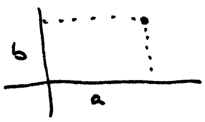
Definición de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \{ (a,b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

Si $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, se llama parte real de z a "a" y parte imaginaria a "b". Se escribe: $Re(z) = a$; $Im(z) = b$

Representación gráfica

Sea $z \in (a,b) \in \mathbb{C}$



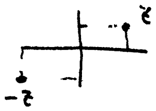
El punto del plano que representa al número complejo z se llama afijo de z

(a,b) es representación (forma) cartesiana (canónica) de z

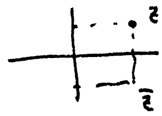
(Hablar de los 4 cuadrantes)

Opuesto y conjugado

Si $z=(a,b)\in\mathbb{C}$, Opuesto de $z = -z = (-a,-b)$



Conjugado de $z = \bar{z} = (a,-b)$



Suma de n.c.

Ⓔ ¿Cómo sumaríamos $a+b\sqrt{-1}$ y $c+d\sqrt{-1}$?

Se define $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$

Producto de un n. real y un n.c.

Ⓔ ¿$\alpha(a+b\sqrt{-1})$?

$\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b)$

Definición

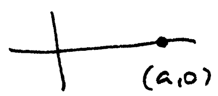
$i = (0,1)$

Número imaginario puro es el que tiene parte real 0

$(0,b) = b(0,1) = bi$

Identificación

$\forall a\in\mathbb{R}$ identificamos a y $(a,0)$



, es decir convenimos que $a=(a,0)$, luego $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

Consecuencia

$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + b(0,1) = a + bi$, que se llama

representación (forma) binómica de z

Suma ...

$\alpha(a+bi)$ ...

$\overline{a+bi}$ ....

$-(a+bi)$ ....

Producto de n.c.

(E) ¿ $(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})$?

$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ab+bc)$ (Definición)

$(a+bi)(c+di) =$ .... (lo más cómodo)

Teorema

$i^2 = -1$ (E) Es como si $i = \sqrt{-1}$, luego $a + b\sqrt{-1} = a + bi$

Demostración

$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$

Potencias de i

$i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^{4n+m} = i^m$

Cociente de n.c.

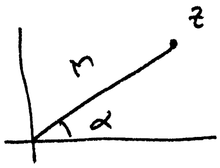
Para calcular $\frac{a+bi}{c+di}$ basta multiplicar num. y denominador por el conjugado del denominador.

Potencia de un n.c.

$(a+bi)^n$ se calcula por el binomio de Newton

Forma polar

Sea $z \in \mathbb{C}$



$z = r_\alpha$

r : módulo

α : argumento

También se llama forma (repr.) módulo-argumental.

$\bar{z} = r_{-\alpha}$; $-z = r_{\alpha+\pi}$

Argumentos de un número complejo

Paso polar - cartesiana

1. $z = r_\alpha \Rightarrow a = r\cos\alpha \wedge b = r \operatorname{sen}\alpha$

2. $z = (a,b)$; $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \end{cases}$

   ∂ se decide según el cuadrante de z

$\boxed{\text{Calculadora}}$

Casos particulares

Los números reales y los imaginarios puros deben ser convertidos directamente (visualmente)

NC5

Forma trigonométrica

$$z = (a,b) = r_\alpha \in \mathbb{C}$$

$$a+bi = r\cos\alpha + r\operatorname{sen}\alpha\, i = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

Paso trigonométrica – binómica

1. $r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = \dots$ operar

2. $a+bi \to r_\alpha \to \dots$ automático

Producto en forma polar

$$M_\alpha,\ N_\beta \in \mathbb{C}$$

$$M_\alpha \cdot N_\beta = M(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)\, N(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) = \dots$$

$$\dots = MN(\cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)) = MN_{\alpha+\beta}$$

Cociente en forma polar

$$M_\alpha,\ N_\beta \in \mathbb{C}$$

$$\frac{M_\alpha}{N_\beta} = X_\sigma \Rightarrow M_\alpha = X_\sigma \cdot N_\beta = XN_{\sigma+\beta} \Rightarrow \begin{cases} M = XN \\ \alpha = \sigma + \beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{M}{N} \\ \sigma = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \frac{M_\alpha}{N_\beta} = \left(\frac{M}{N}\right)_{\alpha-\beta}$$

Potencia en forma polar

Pedir a ellos $(r_\alpha)^3$, $(r_\alpha)^3$

$(r_\alpha)^n = \dots = r^n_{n\alpha}$, fórmula de Moivre

Abraham de Moivre, Francia 1667 - 1754

$$(r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha)$$

Aplicación práctica

Haciendo $r=1$, deducir las fórmulas de $\mathrm{sen}\,n\alpha$ y $\cos n\alpha$ en función de $\mathrm{sen}\,\alpha$ y $\cos\alpha$

Argumentos de un número complejo [Adelantado]

Si $z = r_\alpha \in \mathbb{C}$, α es un argumento de z, pero también lo es $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, luego z tiene infinitos argumentos, que se designan $\arg(z)$

Sólo hay uno en el intervalo $[0, 2\pi)$, que se llama argumento principal y se designa $\mathrm{Arg}(z)$, luego

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

traslación

Interpretación geometrica [SUPRIMIBLE]

Suma de complejos → traslación

Producto real por complejo → homotecia

" complejo por complejo → giro o giro con homotecia

Raices de un número complejo

Siempre se calculan en forma polar

Poner un ejemplo

Que hagan otro como ejercicio

$$\sqrt[n]{M_\alpha} = X_\sigma \Rightarrow M_\alpha = (X_\sigma)^n = X^n_{n\sigma} \Rightarrow \begin{cases} M = X^n \\ \alpha = n\sigma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \sqrt[n]{M} \\ \sigma = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \sqrt[n]{M} \\ \sigma = \dfrac{\alpha}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{M_\alpha} = \sqrt[n]{M}_{\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}}$$

Ecuaciones

Proponer ec. con n.c.

Fecha: M. 12. 1. 1988

① Potencia de n. c.

② $(3-i)^5 + 3_{130^\circ} \cdot 2_{50^\circ} + \dfrac{25+8i}{3+2i}$

③ $i^{120} \left(\sqrt{2}_{135^\circ} + \sqrt{2}_{225^\circ} \right)^2 - (2i^2)^2$

④ $\sqrt[7]{1_{140^\circ}}$

⑤ Resolver $z^2 - (2+2i)z + 3 - 2i = 0$

① Cociente de números complejos

② $i^{13} + (3-i)(2+2i) + \dfrac{-9+7i}{3+2i}$

③ $\dfrac{\left(5_{20^\circ}\right)^3}{\left(5_{10^\circ}\right)^2 \left(2_{25^\circ}\right)^4} \cdot (-8)$

④ $\sqrt[6]{64_{30^\circ}}$

⑤ Resolver $z^2 - (11+3i)z + (38+27i) = 0$

Para elevar calificación

① El producto de dos núm complejos es $2i$ y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es $\frac{1}{2}$. Hallarlos

② Resolver $z^3 - iz^2 - 2iz - 2 = 0$

Matemáticas   Tercero de B.U.P.   Curso 1991-92

Hoja de problemas.   ***Parte B : Números complejos***   **Fecha: J.9.1.1992**

[1] Siendo $z=1-4i$, $t=(-4,5)$, $u=3_{90^\circ}$, $v=-14-3i$, $x=4_{180^\circ}$, realiza las siguientes operaciones en forma binómica:

a) $(v/t) + 4u - z^2$ b) $i^{117}+(-i)^{45}-zv+x$ c) $\overline{v}+3\overline{x}$

[2] Siendo $z=5_{140^\circ}$, $t=25(\cos 75^\circ+i\,\mathrm{sen}\,75^\circ)$, $u=i$, $v=125_{80^\circ}$, $x=-1/5$, realiza las siguientes operaciones en forma polar:

a) t^3v^5/z^7 b) $z^3\overline{u}(-v)$ c) $tx/(zu)$ d) $(zxt)^4/(5v)$

[3] Siendo $z=5_{14^\circ}$, $t=2(\cos 55^\circ+i\,\mathrm{sen}\,55^\circ)$, $u=6i$, $v=12+5i$, $x=(-5,2)$ realiza las siguientes operaciones en la forma que consideres más adecuada:

a) $z+t$ b) x^{13} c) $u^2+3\overline{v}$ d) $(-t)^3$ e) $|v|+\mathrm{Arg}(z)$ (|| -> módulo)

[4] Calcula las siguientes raíces expresando los resultados en forma polar:

a) $\sqrt[5]{7776_{55^\circ}}$ b) $\sqrt{5-12i}$ c) $\sqrt[3]{27_{210^\circ}}$ d) $\sqrt[4]{625}$

[5] Calcula las siguientes raíces expresando los resultados en forma binómica; representa gráficamente los afijos de las soluciones.

a) $\sqrt[4]{-625}$ b) $\sqrt[6]{1_{60^\circ}}$ c) $\sqrt[3]{i}$

Matemáticas Tercero de B.U.P., grupo A. Curso 1991-92

Examen de recuperación de la Parte B: *Números complejos* **Fecha: J.20.2.1992**

[1] Cociente de números complejos.

[2] Siendo $z=4-3i$, $t=(1,-5)$, $u=3_{90^\circ}$, $v=12-8i$, $x=4_{180^\circ}$, realiza las siguientes operaciones en forma binómica:

a) $(v/t) - 3u + z^2$ b) $i^{25} + (-i)^{43} + zv - 3\overline{x}$

[3] Siendo $z=5_{20^\circ}$, $t=25(\cos 65^\circ + i\,\mathrm{sen}\,65^\circ)$, $u=-4i$, $v=(1/5)_{150^\circ}$, realiza las siguientes operaciones en forma polar:

a) z^3v^4/t^5 b) $z^3(-u)(\overline{v})$ c) $\sqrt[5]{v}$

[4] Siendo $z=5_{67^\circ}$, $t=2(\cos 18^\circ + i\,\mathrm{sen}\,18^\circ)$, $v=1+4i$, realiza las siguientes operaciones en la forma que consideres más adecuada; da el resultado en la forma que se pida:

a) $z+t$ Resultado en polar. b) v^6 Resultado en binómica.

Valor de las preguntas: 1: *tres puntos*; resto: *un punto cada apartado*

Matemáticas Tercero de B.U.P., grupo A. Curso 1991-92

Examen de subir nota de la Parte B: *Números complejos* **Fecha: J.20.2.1992**

[1] Demuestra que si *a* es un número real y *z* un número complejo,

$$-\overline{z} = \overline{-z}$$

[2] Los números complejos permiten resolver cualquier ecuación de segundo grado, siempre que éstos se admitan como solución. Resuelve ésta:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

[3] También es posible que en el planteamiento de una ecuación aparezcan los números complejos. En estos casos es costumbre llamar *z* a la incógnita, que en principio puede ser cualquier número complejo. Resuelve ésta:

$$(4+3i)z + 5i = 3$$

[4] Pero el caso más difícil es cuando la ecuación tiene varias soluciones. Busca todas las soluciones de esta ecuación:

$$(z^2+i)^2 = 1$$