Álgebra

1. Definición de espacio vectorial

Ⓡ Producto cartesiano, función

Ⓔ $\mathbb{Z}$, + ; $\mathbb{R}$, · ; G ; $*$

Definición de ley de composición interna

Sea G un conjunto. Se dice que $*$ es una l.c.i. (u operación interna) en G cuando $*: G \times G \longrightarrow G$ es una aplicación

Notación: $*(a,b) = a * b$

Ejemplos

a) Usuales

b) Por tabla de Cayley

Problema

Resolver ecuaciones en $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ y generalizar a $(G, *)$

Definición de grupo

Sea G un conjunto. Se dice que el par $(G, *)$ es un grupo cuando

0. $*$ es una l.c.i. en G [G es cerrado para $*$]

$$\forall a, b \in G : a * b \in G$$

1. Existencia de elemento neutro
2. Existencia de elemento simétrico
3. Propiedad asociativa

$(G, *)$ se llama grupo abeliano o conmutativo cuando es grupo y se verifica

4. Propiedad conmutativa

Propiedades

1. El elemento neutro es único
2. Cada elemento tiene un único simétrico

Demostración

(...)

Proposición

Sea $(G, *)$ un grupo. Las siguientes ecuaciones tienen una única solución cada una:

1. $a * x = b$
2. $x * a = b$

Demostración

(...)

Notaciones

1. Aditiva

$*$: $+$

e : 0 (nulo)

a' : $-a$ (opuesto)

$a + (-b) = a - b$

2. Multiplicativa

$*$: $\cdot$ (omisible)

e : 1 (unidad)

$a' = a^{-1} = \frac{1}{a}$

Si $*$ es conmutativa $ab^{-1} = \frac{a}{b}$

Definición de cuerpo

Sea K un conjunto y $+$ y $\cdot$ dos l.c.i. Se dice que la terna $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo cuando

1. $(K,+)$ es un grupo abeliano
2. $\cdot$ es asociativa
3. $\exists\ 1$
4. $\forall a \in K - \{0\}\ \exists\ a^{-1} \in K$
5. $\cdot$ es distributiva respecto a $+$

Un cuerpo se llama abeliano o conmutativo cuando $\cdot$ es conmutativo

Ejemplos

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Propiedades

Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo. $\forall a,b \in K$:

I. $a\cdot 0 = 0 \ \wedge\ 0\cdot a = 0$

II. $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \ \vee\ b = 0$

III. $(-a)b = -(ab) = a(-b) \longrightarrow = -ab$

IV. $(-1)a = -a$

Demostración

I. $a = a\cdot 1 = \dots$

$a = a + 0 = \dots$

(...)

Ⓔ Producto de escalar y vector

Definición de ley de composición externa

Sean G y K dos conjuntos. Se dice que $*$ es una ley de composición externa a G con escalares en K cuando

$$* : K \times G \longrightarrow G \quad \text{es una aplicación}$$

Notación $*(\alpha, a) = \alpha * a$

Definición de espacio vectorial

Sea V un conjunto con la l.c.i. $+$, $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y una l.c.e. en V con escalares en K. Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un e.v. sobre $(K, +, \cdot)$ cuando

a) $(V, +)$ es un grupo abeliano

b) La l.c.e. verifica $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$

1. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
2. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
3. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$
4. $1\vec{a} = \vec{a}$

Los elementos de V se llaman vectores y los de K escalares

(E) Estructuras algebraicas

1. l.c.i.	2 l.c.i.	1 l.c.i. + 1 l.c.e.
Monoide	Anillo	Módulo
Semigrupo	Anillo unitario	E.V.
Grupo	Dom. integridad	
	Cuerpo	

Propiedades

$\forall \alpha \in K, \ \forall \vec{a} \in V:$

I. $0\vec{a} = \vec{0}$

II. $\alpha \vec{0} = \vec{0}$

III. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

IV. $\alpha \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \lor \vec{a} = \vec{0}$

Demostración

(...)

II. $\alpha\vec{0} = \alpha\vec{0} + \vec{0} \Rightarrow \alpha(\alpha\vec{0}) = \alpha(\alpha\vec{0}) + \alpha\vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{0} = \vec{0}$

2. Base de un espacio vectorial

A partir de ahora $(V, +, \cdot)$ será un e.v. sobre $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Sistema

Llamamos sistema (o sistema de vectores) a cualquier subconjunto de V

Dependencia e independencia lineal

Sea $S = \{ \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \}$ un sistema

1. Se dice que S es un sistema libre (o que $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ son linealmente independientes) cuando

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i \right] = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

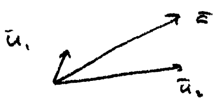
2. Se dice que S es un sistema ligado (o que $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ son linealmente dependientes) cuando S no es libre, es decir:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ no todos nulos} \mid \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$$

Ejemplos

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Combinación lineal

E 

$\vec{a} \in V$ es c.l. de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in V$ cuando $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \mid \vec{a} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i$

Ejemplos y ejercicios

En $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$

Proposición

$\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k\}$ ligado $\Leftrightarrow \exists\ \bar{a}_i$ c.l. de los demás

Demostración

(...)

Sistema de generadores

Se dice que $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k\}$ es un sistema de generadores de $(V, +, \cdot)$ cuando todo elemento de V es c.l. de $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k\}$, es decir:

$$\forall \bar{a} \in V\ \exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \mid \bar{a} = \sum \lambda_i \bar{u}_i$$

Ejemplo

En $\mathbb{R}^2$

Base

Un sistema es base de un espacio vectorial cuando es libre y sistema de generadores

Ejemplo

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Dimensión

Dimensión de un e.v. es el número de elementos de una base cualquiera

E ....

Teorema

Sean $(V,+,\cdot)$ e.v. de dimensión n sobre $(\mathbb{R},+,\cdot)$ y $B=\{\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n\}$ base de V. Entonces

$$\forall \vec{x}\in V\ \exists!\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \vec{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{u}_i$$

Coordenadas

$$\begin{aligned} \text{coord}_B : V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\longrightarrow (x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

Ⓔ Es un isomorfismo

Por tanto: $\text{coord}_B(\vec{x})=(x_1,\dots,x_n) \Rightarrow \vec{x}=\sum x_i\bar{u}_i$

Demostración del teorema

$\exists)$ B base $\Rightarrow$ B sist. gen. $\Rightarrow$ $\vec{x}$ es c.l. de $\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R} \mid \vec{x}=\sum x_i\bar{u}_i \Rightarrow \exists\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R} \mid \vec{x}=\sum x_i\bar{u}_i$

$\exists!)$ Supongamos $\exists\ (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n \mid \vec{x}=\sum x_i\bar{u}_i \wedge \vec{x}=\sum y_i\bar{u}_i$.

$\vec{x}=\vec{x} \Rightarrow \sum x_i\bar{u}_i=\sum y_i\bar{u}_i \Rightarrow \sum x_i\bar{u}_i-\sum y_i\bar{u}_i=\sum(x_i-y_i)\bar{u}_i=\vec{0} \Rightarrow$

$\overset{B\text{ libre}}{\Rightarrow} x_i-y_i=0\ \forall i=1,\dots,n \Rightarrow x_i=y_i\ \forall i=1,\dots,n \Rightarrow (x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)$

Ejemplos y ejercicios

a) Demostrar que algo es base

b) Calcular coordenadas.

3. Aplicación lineal

(E) Aplicaciones entre estructuras

Aplicación lineal

Sean $(V,+,\cdot)$ y $(V',+,\cdot)$ e.v. sobre $(\mathbb{R},+,\cdot)$ y

$f: V \to V'$ aplicación.

Se dice que f es una aplicación lineal cuando

1. $\forall \vec{a},\vec{b} \in V: \quad f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$
2. $\forall \vec{a} \in V \ \forall \alpha \in K: \quad f(\alpha\vec{a}) = \alpha f(\vec{a})$

Propiedades

I. $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_{V'}$

II. $\forall \vec{a} \in V: \quad f(-\vec{a}) = -f(\vec{a})$

Demostración

I. $\vec{u} \in V; \quad f(\vec{u}) = f(\vec{u}+\vec{0}_V) \overset{1}{=} f(\vec{u}) + f(\vec{0}_V) \Rightarrow f(\vec{0}_V) = \vec{0}_{V'}$

II. $f(-\vec{a}) = f((-1)\vec{a}) = (-1) f(\vec{a}) = -f(\vec{a})$

Lineales de V en V'

$$\mathcal{L}(V,V') = \{ f: V \to V' \mid f \text{ es a.l.} \}$$

Proposición

$$f \in \mathcal{L}(V,V') \iff \forall \alpha,\beta \in K \ \forall \vec{a},\vec{b} \in V: f(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b})$$

Dem. como ej.

Aplicación identidad

Siendo V un e.v. de dim n, se llama aplicación identidad a

$$I_n : V \to V$$
$$\vec{x} \to \vec{x}$$

Producto de un escalar y una aplicación

Siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f: V \to V'$ aplicación, se define αf así:

$$\alpha f : V \to V'$$
$$\vec{x} \to \alpha f(\vec{x})$$

Proposición

1. $I_n \in \mathcal{L}(V, V)$
2. $f, g \in \mathcal{L}(V, V') \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}(V, V')$
3. $f \in \mathcal{L}(V, V') \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}(V, V')$
4. $f \in \mathcal{L}(V, V') \wedge f$ biyectiva $\Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{L}(V', V)$
5. $f \in \mathcal{L}(V, V') \wedge g \in \mathcal{L}(V', V'') \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(V, V'')$

Demostración

(...)

Expresión analítica de una a.l.

V e.v. de dim. K, $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_K\}$ base de V

V' e.v. de dim n, $B' = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ base de V'

$f: V \to V'$ a.l.

Llamamos $\mathrm{coord}_{B'}(f(\vec{u}_i)) = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \qquad i = 1, \ldots, k.$

Siendo $\vec{x} \in V$, llamamos $\mathrm{coord}_B(\vec{x}) = (x_1, \ldots, x_k)$

$\mathrm{coord}_{B'}(f(\vec{x})) = (y_1, \ldots, y_n)$

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} f(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j \vec{v}_j \\[2ex] f(\vec{x}) = f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{u}_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i f(\vec{u}_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i\right) v_j \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall j = 1, \ldots, n: \quad y_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i = a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \ldots + a_{kj} x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + \ldots + a_{k1} x_k \\ \vdots \\ y_n = a_{1n} x_1 + \ldots + a_{kn} x_k \end{cases} \Rightarrow (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 \ldots x_k) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{k1} & a_{kn} \end{pmatrix}$$

(Ecuaciones de f)

Ya se explicará el producto. De momento, notación

[Colocar por filas]

$$\Rightarrow (y_1 \ldots y_n) = (x_1 \ldots x_k) \; M(f; B, B')$$

Número de filas de M $= \dim(V)$

columnas $= \dim(V')$

<u>Bases canónicas</u>

$C_n = \{ (1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1) \} \subset \mathbb{R}^n$

$\mathrm{coord}_{C_n}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$

4. Matrices y determinantes

Definiciones sobre matrices

Si A es un conjunto, se llama matriz de orden $k \times n$ a la reunión de kn elementos de A en k filas y n columnas. Usaremos $A = \mathbb{R}$.

Al conjunto de todas las matrices de orden $k \times n$ se le llama $\mathcal{M}_{k,n} = \mathcal{M}_{k \times n}$

Si $M \in \mathcal{M}_{k,n}$ se puede escribir así: $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = [\quad]$

y de forma simplificada $M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}} = [\ ]$, donde

a_{ij} se llama elemento general de M

Llamaremos líneas de M a sus filas y columnas, indistintamente.

Si $k = n$ la matriz se llama cuadrada. Podemos considerar sus diagonales principal y secundaria. Llamamos $\mathcal{M}_{n,n} = \mathcal{M}_n$, matrices cuadradas de orden n

Matriz unidad de orden n es $I_n = (\delta_{ij})$

Si $k = 1$ la matriz se llama matriz fila

Si $n = 1$ " " " " " columna

Para que dos matrices sean iguales deben ser del mismo orden y tener sus elementos correspondientes iguales.

Ejercicio

Demostrar que $M(I_n; B, B) = I_n$

Suma de matrices

Dos matrices se dice que son sumables cuando son del mismo orden. En ese caso la suma se efectúa elemento a elemento. Ejemplo: (...)

$$+ : \mathcal{M}_{k,n} \times \mathcal{M}_{k,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{k,n}$$

$$((a_{ij}), (b_{ij})) \longrightarrow (a_{ij} + b_{ij})$$

Proposición

$$M(f+g; B, B') = M(f; B, B') + M(g; B, B')$$

Producto de un escalar ~~y~~ una matriz

Para multiplicar la matriz M por el escalar α basta multiplicar todos los elementos de M por α. Ejemplo: (...)

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{kn} \longrightarrow \mathcal{M}_{k,n}$$

$$(\alpha, (a_{ij})) \longrightarrow (\alpha a_{ij})$$

Proposición

$$M(\alpha f; B, B') = \alpha M(f; B, B')$$

Producto de matrices

Dos matrices se dice que son multiplicables cuando el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda. En ese caso el producto se efectúa así: Ej: (...)

$\cdot : \mathcal{M}_{k,n} \times \mathcal{M}_{n,p} \longrightarrow \mathcal{M}_{k,p}$

$$\left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots k \\ j=1\dots n}} , (b_{jr})_{\substack{j=1\dots n \\ r=1\dots p}} \right) \longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr} \right)_{\substack{i=1\dots n \\ r=1\dots p}}$$

Proposición

$$M(g\circ f ; B, B'') = M(f ; B, B') \cdot M(g ; B', B'')$$

Potencia de una matriz

Si $A \in \mathcal{M}_n$ se define $A^k = A \cdot A \cdot \overset{k}{\dots} \cdot A$

Una matriz cuadrada es nilpotente cuando $\exists\, k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0$

Matriz traspuesta

Ejemplo: (...)

$$t : \mathcal{M}_{k,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,k}$$
$$(a_{ij}) \longrightarrow (a_{ji})$$

Determinante de una matriz

El determinante de una matriz cuadrada es un número

Las matrices que no son cuadradas no tienen determinante

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}$, el determinante de A se designa por cualquiera de estos símbolos: $\det(A)$, $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}$

El determinante de una matriz cuadrada de orden n se define mediante una fórmula general que es de difícil aplicación práctica cuando $n > 3$.

Aplicada a $n = 1$: $|a_{11}| = a_{11}$

Aplicada a $n = 2$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

Aplicada a $= 3$: (...) Regla de Sarrus

Orden de un determinante es el orden de la matriz cuadrada corresp.

Para calcular determinantes de orden superior se reducen a determinantes de orden 2 ó 3 utilizando las propiedades que poseen.

Propiedades de los determinantes

1. $|A| = |A^t|$
2. Si se intercambian dos líneas paralelas el determinante cambia de signo
3. Si se multiplica una línea de un determinante por un número, todo el determinante queda multiplicado
4. Un det. con dos líneas paralelas iguales es nulo
5. proporcionales
6. $|(\Sigma)| = \Sigma (| \; |)$

7. Si una línea es comb. lineal de dos líneas paralelas, el det. es nulo

8. Se puede sustituir una línea por la suma de ella más un múltiplo de otra paralela

9. Cualquier determinante se puede transformar en otro que tiene una línea compuesta por un uno y el resto ceros.

10. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Submatrices

Se llama submatriz de A a cualquier matriz obtenida a partir de A suprimiendo cualquier cantidad de líneas.

Menor complementario

Si $A = (a_{ij})_{i,j=1 \ldots n}$, se llama menor complementario del elemento a_{ij} al determinante de la submatriz de A obtenida con la eliminación de la fila i y la columna j. Se designa α_{ij}

Adjunto

Adjunto de a_{ij} es $(-1)^{i+j} \alpha_{ij}$ y se designa por A_{ij}

Mapa de signos

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

Desarrollo de un det. por los adjuntos de una línea

Un det. se puede calcular multiplicando los elementos de una línea cualquiera por sus adjuntos y sumando los resultados. Ejemplo : (...)

Cálculo de det. de orden sup. a 3

Primero se transforma en un determinante que tenga una línea formada por ceros y un uno (ó −1) y luego se desarrolla por los adjuntos de esa línea, con lo que queda convertido en un determinante de orden una unidad menos. El proceso continúa hasta llegar a un determinante de orden 2 ó 3

Matriz adjunta

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, se llama matriz adjunta de A a la matriz $adj(A) = (A_{ij})$

Matriz inversa

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Se llama matriz inversa de A a otra matriz $B \in \mathcal{M}_n$ que verifique

1. $AB = I_n$
2. $BA = I_n$

Se denota $B = A^{-1}$

Contraejemplo

$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$ no tiene inversa

Matrices singulares y regulares

$A \in \mathcal{M}_n$ es singular cuando $\det(A) = 0$ y regular cuando $\det(A) \neq 0$

Proposición

Las matrices singulares no tienen inversa

Demostración

(...)

Proposición

Si $A \in \mathcal{M}_n$ es regular, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A^t)$

(Se puede tomar $(\operatorname{adj}(A))^t$)

Demostración: [con Lema]

Menores de una matriz

Menor de orden h de $A \in \mathcal{M}_{n \times k}$ es el determinante de una submatriz cuadrada de orden h de A.

Menor principal de orden h es el determinante de la submatriz

$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{hh} \end{pmatrix}$

Rango de una matriz

Es el orden del menor no nulo de mayor orden. Se denota $rg(A)$

Propiedades

1. $rg(A) = rg(A^t)$
2. Si se intercambian dos líneas paralelas el rg no varía
3. Si se suprime una línea formada por ceros el rg no varía
4. Si se suprime una línea que sea c.l. de otras paralelas el rg no varía

Lema

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{kn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,n}$ con $k < n$. Entonces si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1(k-1)} & a_{1k} \\ & \ddots & & \\ & & a_{k(k-1)} & a_{kk} \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1(k-1)} & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & a_{k(k-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

, la fila k es c.l. de las demás.

Cálculo del rg. de una matriz

1. Método " ". Consiste en buscar un menor no nulo empezando por el de mayor orden posible
2. Método de ampliación de menores. Consiste en transformar la matriz dada en otra que tenga sus menores principales $\neq 0$, ampliando el orden de éstos cuando sea posible
3. Método de Gauss

5. Sistemas de ecuaciones lineales

Definiciones

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de igualdades de la forma

$$[S]\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + \dots \qquad\qquad\quad = d_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots \qquad + a_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

Los a_{ij} se llaman coeficientes $(i=1,\dots,k\ ;\ j=1\dots n)$

Los x_j se llaman incógnitas

Los d_i se llaman términos independientes

La empla $(s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^n$ se dice que es una solución de $[S]$ cuando sustituyendo las x_j por la s_j se verifican todas las igualdades.

Expresión matricial

C = matriz de los coeficientes

A = matriz ampliada

El sistema $[S]$ se puede escribir como

$$C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix}$$

Clasificación

Sist. ec. lin.
- No hom. $\exists d_i \neq 0$
  - Incompatibles: $\nexists$ sol.
  - Compatibles
    - Determinados: $\exists!$ sol.
    - Indeterminados: $\exists \infty$ sol.
- Homogéneos $\forall d_i = 0$
  - Incompatibles: sólo tiene la sol. trivial $(0, 0, \dots, 0)$
  - Compatibles: tiene alguna sol. no trivial (luego tiene ∞)

Sistemas de Cramer

$[S]$ es un sistema de Cramer cuando

1. $k = n$
2. $|C| \neq 0$

Los sistemas de Cramer tienen una única solución, luego si son homogéneos son incompatibles y si son no homogéneos son compatibles y determinados

Regla de Cramer

Si $[S]$ es un sistema de Cramer $\forall j = 1, \dots, n$:

$$x_j = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & d_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & d_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}}{|C|}$$

Demostración

(...)

Sistemas equivalentes

Dos sist. de ec. se dice que son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones. Escribiremos $[S] \sim [S']$

Propiedades

Se obtiene un sistema equivalente a otro dado con las siguientes transformaciones:

1. Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero
2. Sumar a una ecuación una comb. lineal de las demás
3. Suprimir una ec. que sea c.l. de las demás

Teorema de Rouché

$[S]$, C, A.

1. $rg(A) > rg(C) \Rightarrow [S]$ no tiene sol.
2. $rg(A) = rg(C) \Rightarrow [S]$ tiene alguna sol.

   Llamamos $r = rg(A)$

   a) $r = n \Rightarrow [S]$ tiene una solución

   b) $r < n \Rightarrow [S]$ tiene infinitas soluciones

   $r < n \Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{N} \mid r + t = n$

   r incógnitas se pueden expresar en función de las t restantes.

   Se dice que las soluciones forman una familia t-paramétrica.

Estudio particular

a) $[S]$ no homogéneo

$rg(A) > rg(C) \Rightarrow [S]$ incompatible

$rg(A) = rg(C) = r \Rightarrow [S]$ compatible

$r = n \Rightarrow [S]$ determinado

$r < n \Rightarrow [S]$ indeterminado

b) $[S]$ homogéneo

Necesariamente $rg(A) = rg(C) \; (= r)$

$r = n \Rightarrow [S]$ incompatible

$r < n \Rightarrow [S]$ compatible

AL - P1

Estudiar si algo es grupo

Resolver $ax + b = c$ en un cuerpo

Si a un sist. ligado se le añade un vector, sigue siendo ligado
gen. gen.
" " " " libre " " quita " " " " libre
" " " "

Todo sistema que cont. al $\vec{0}$ es ligado

$\{\vec{a}, \vec{b}\}$ libre $\Rightarrow \{\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\}$ libre

Es cero el producto de los elems de una fila por los adj. de otra paralela

Matrices con condiciones y ej. determinado

Dadas soluciones, hallar ec.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Operaciones raras como $\begin{vmatrix} \operatorname{rg}(A) & |B| \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$

¿ $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ libre $\Rightarrow \{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, \bar{a}+\bar{b}, \bar{a}\}$ libre , $\{\bar{a}+\bar{c}, \bar{a}-\bar{c}, \bar{a}\}$?

Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación $|A - xI| = 0$

PROBLEMAS

Datos

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$(x,y) \to (x+y, 2y, -x+y)$; $(x,y,z) \to (y-z, 2x+z, 3y, -x)$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \; ; \; B_2 = \{(-1,1), (2,0)\}$$

$B_3 = \{(0,1,1), (1,0,1), (0,0,-1)\}$; $B_4 = \{(0,1,3,0), (1,0,3,0), (1,-3,0,1), (0,1,1,0)\}$

Problemas

1. Calcular $A = \frac{1}{4}(P^t \cdot P)$, $B = Q \cdot Q^t$, $C = Q^t \cdot Q$, A^2, B^3, $C - 4I_4$, $3A - 2B$

2. Hallar el determinante y el rango de P, Q, A, B, C, A^2, B^3 y $(C + 2I_4)$

3. Demostrar que B_2 y B_3 son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

4. Hallar $\text{coord}_{B_2}(x,y)$ y $\text{coord}_{B_3}(x,y,z)$

5. Demostrar que f y g son aplicaciones lineales

6. Hallar $M(f; C_2, C_3)$ y $M(g; C_3, C_4)$

7. Hallar $M(f; B_2, C_3)$ y $M(g; B_3, C_4)$

8. Demostrar que $M(f; B_2, B_3) = P$ y $M(g; B_3, B_4) = Q$

9. Decir tres matrices $A \in \mathcal{M}_{5,5}$ sin elementos nulos que verifiquen $a_{11} = 1 = a_{15}$; $a_{51} = 2 = a_{55}$, que tengan rango 2, 3 y 4

10. Hallar el rango de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que $\left(A = \{a+b\sqrt{2} \,/\, a,b \in \mathbb{Q}\},\, +,\, \cdot\right)$ es espacio vectorial sobre $(\mathbb{Q},+,\cdot)$

2. Sean $(K,+,\cdot)$ un cuerpo conmutativo, $x,y \in K$. Demostrar $x^2=y^2 \Rightarrow x=y \vee x=-y$

3. Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo. Demostrar que $\forall a \in A:\ a\cdot 0 = 0 \wedge 0a = 0$

4. Demostrar que $B=\{(-1,-2),(0,2)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$. Encontrar $\mathrm{coord}_B((x,y))$

5. Demostrar $\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k\}$ sist. ligado $\Rightarrow \forall\, \vec{a}_{k+1} \in V:\ \{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k,\vec{a}_{k+1}\}$ ligado

6. " " $\Leftrightarrow \exists\, \vec{a}_i$ comb. lineal de los demás.

7. Todo sistema que contenga al vector nulo es ligado.

8. Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo. Estudiar las ecuaciones
   a) $a+x=b$
   b) $ax=b$

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^t, $A\cdot A^t$, $A^t\cdot A$, A^2, $(A^t)^2$, $(A\cdot A^t)^2$, $(A\cdot A^t)^3$, $(A^t A)^2$ y sus determinantes.

10. Calcular $rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$ utilizando la regla de Cramer

12. Resolver el sistema $\begin{cases} -y + z = -2 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$ utilizando la regla de Cramer.

Matemáticas I Curso de Orientación Universitaria Curso 1991-92

Hoja de problemas. ***Tema: Álgebra.*** **Fecha: X.30.10.1991**

1. Estudiar si el vector (3,8,1) es combinación lineal de los vectores (1,0,-1), (3,1,2) y (4,1,1).

2. a) Estudiar si el sistema { (0,0), (7,6) } es libre.
   b) Estudiar si el sistema { (0,0,0), (1,1,1), (1,2,1) } es libre.
   c) Enuncia y demuestra una propiedad general basándote en los apartados anteriores.

3. Demostrar que si el sistema { $\bar{a}$, $\bar{b}$ } es un sistema de generadores de R^2, también lo es { $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{p}$ }, siendo $\bar{p}$ un vector cualquiera de R^2.

4. f: R^3 -> R^3 es una aplicación definida mediante $f(x,y,z)=(x-y,2x,x+3y)$. B = { (1,2,3), (-1,2,3), (0,1,2) } es base de R^3. Hallar $M(f;B,C_3)$.

5. De la aplicación g: R^2 -> R^2 se sabe que g(2,3)=(-2,5) y g(6,9)=(-6,14). ¿Se puede afirmar que g es lineal? ¿Se puede afirmar que no lo es?

6. De la aplicación h: R^3 -> R^2 se sabe que g(1,-3,2)=(2,1) y g(-2,1,3)=(0,1). ¿Se puede calcular g(0,5,7)? ¿Y g(0,-5,7)?

Matemáticas I Curso de Orientación Universitaria Curso 1991-92

Hoja de problemas. ***Tema: Álgebra.*** **Fecha: L.25.11.1991**

1. Demostrar que si el sistema { $\bar{a}$, $\bar{b}$ } es un sistema libre de R^2, también lo es { $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{a}-\bar{b}$ }.

2. f: R^3 -> R^3 es una aplicación definida mediante $f(x,y,z)=(x+2y,0,x)$ y B = { (2,-2,1), (1,0,1), (0,1,0) } una base de R^3.
   a) Calcular $coord_B(x,y,z)$; b) Hallar $M(f;C_3,B)$.

3. Demostrar que si A, B y C son matrices cuadradas de orden n y $|A|\neq 0$, entonces AB=AC => B=C

4. Escribir 4 matrices cuadradas de orden 4 que tengan rango, respectivamente, 1, 2, 3 y 4

5. Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $|A-xI_2|=0$

6. Calcula el rango de la siguiente matriz. Utiliza los métodos de ampliación de menores y de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matemáticas Curso de Orientación Universitaria Curso 1991-92

Hoja de problemas. *Tema: Matrices.* **Fecha: L.4.11.1991**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[1] $|A|+|B|$ [2] $|A+B|$ [3] $2B-B^t$ [4] $C^{-1}+D^{-1}$ [5] $10C^{-1}+EF$

[6] E^t-F^t [7] $\mathrm{adj}(D)-C^t$ [8] $|C+D|$ [9] $3E-2F^t$ [10] $|FE|$

[11] $|1000D|$ [12] C^2+D^t [13] A^3+B^2 [14] $(E^tE)^3$ [15] $\mathrm{adj}(E)$

Matemáticas I   Curso de Orientación Universitaria   Curso 1991-92

Examen de recuperación de la 1ª Evaluación. ***Tema: Álgebra.*** **Fecha: L.24.2.1992**

1. Definición de grupo y de grupo abeliano.

2. Definición de espacio vectorial.

3. f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación definida como $f(x,y,z)=(2x,-y+z,-z)$.
   B = { (0,1,0), (3,0,2), (-1,0,-1) } es un sistema de $\mathbb{R}^3$. Se pide:
   a) Demostrar que B es base.   b) Calcular $\text{coord}_B(x,y,z)$.
   c) Demostrar que f es una aplicación lineal.   d) Hallar $M(f;C_3,B)$

4. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
   calcular:
   a) $\det(AB-BA)$;   b) D^{22} ;   c) $A^t + B^2 - C^{-1}$;   d) $3|A| - 4|D|^2 + C^t$

5. Discute el sistema $[S]\ \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = k-1 \\ kx + y = 3 \end{cases}$, según los valores de k

<u>Valor de las preguntas:</u> 1: *un punto*; 2, 3 y 4: *dos puntos*; 5: *tres puntos*

Matemáticas I   Curso de Orientación Universitaria   Curso 1991-92

Examen de subir nota de la 1ª Evaluación. ***Tema: Álgebra.*** **Fecha: L.24.2.1992**

1. $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo; a, b, y c son elementos conocidos de K y x es uno desconocido. Se pide:

   a) Sabiendo que $a\neq0$, resolver la ecuación $ax+b=c$ justificando todos los pasos con las propiedades de los cuerpos
   b) Razonar cuáles serían las soluciones si fuera a=0

2. La siguiente propiedad es cierta en cualquier espacio vectorial: *"Si a un sistema ligado se le añade un vector cualquiera, el sistema sigue siendo ligado"*. Se pide:

   a) Enunciar simbólicamente la propiedad
   b) Demostrarla

3. La siguiente propiedad es cierta: *"La suma de los productos de los elementos de una fila de un determinante de orden n por los adjuntos de una línea paralela es cero"*. Se pide:

   a) Enunciar simbólicamente la propiedad
   b) Demostrarla para el caso $n=3$

C.O.U. B

Fecha: V.13.12.1985 Tiempo: 50' + 2' para mirar apuntes

2p. (1) Definición de grupo abeliano

1p. (2) Siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, hallar $A^2 + 3I_3$

2p. (3) Hallar el rango y el determinante de $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(4) Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (3x+4y, -x+2y)$, $B = \{(-3,1), (2,1)\}$

2p. a) Demostrar que B es base de $\mathbb{R}^2$ escribir $\text{coord}_B(x,y)$.

1p. b) Demostrar que f es aplicación lineal

2p. c) Encontrar $M(f; C_2, B)$

Para subir calificación

(1) Sea $G = \{a, b, c\}$. Definir una l.c.i. en G de modo que $(G, *)$ no sea grupo, pero exista elemento neutro.

(2) Sea $(V, +, \cdot)$ un e.v. sobre $(K, +, \cdot)$, $\vec{a}, \vec{b} \in V$, $\alpha \in K$. ¿Es posible encontrar $\vec{x} \in V \mid \alpha\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$?

(3) Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n} \mid a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Calcular su determinante

C.O.U. C

Fecha: V. 13.12.1985 Tiempo: 50' + 2' para mirar apuntes

2p. (1) Definición de grupo abeliano

1p. (2) Siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, hallar $A^2 - 5I_3$

2p. (3) Calcular el rango y el determinante de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(4) Siendo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (-2x+2y, 4x-y)$ y $B = \{(1,-2), (1,1)\}$

2p. a) Demostrar que B es base de $\mathbb{R}^2$ y escribir $\text{coord}_B(x,y)$

1p. b) Demostrar que f es aplicación lineal

2p. c) Encontrar $M(f; C_2, B)$

Para subir calificación

(1) Sea $G = \{a, b, c\}$. Definir una l.c.i. en G con elemento neutro de modo que a y b tengan simétrico pero $(G, *)$ no sea grupo

(2) Escribir una matriz $A \in \mathcal{M}_{4,4}$ sin elementos nulos tal que $a_{ij} = i$ cuando $i=j$ y

a) $rg(A) = 1$ b) $rg(A) = 3$

(3) Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo conmutativo. ¿Se pueden resolver las ecuaciones $a+x=b$ y $ax=b$?

M. 27. 1. 1987

3p ① Aplicación lineal: def, ejemplo, expresión analítica, matriz y ecuaciones

1p ② Estudiar si $(5,1,3)$ es c. l. de $(1,0,2)$ y $(6,1,6)$

③ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \to (2x-y,\ 2y+z)$

$B = \{(1,1,1), (-1,0,1), (2,5,-6)\}$, $B' = \{(1,3), (2,-1)\}$

2p a) Demostrar que B' es base de $\mathbb{R}^2$

0.5p b) calcular $coord_{B'}(x,y)$

3p c) Calcular $M(f; B, B')$

0.5 d) Ecuaciones de f resp. a B y B'

Para subir nota

① Sea $(V,+,\cdot)$ esp. vect. , $\vec{a}, \vec{b} \in V$ lin. indep.

Demostrar que $\{\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\}$ es libre

② Sea $(V,+,\cdot)$ esp. vect. , $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ base de V,

$D = \{(-1,3), (2,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$, $f : V \to \mathbb{R}^2$ aplic.

lineal , $M(f; B, D) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $f(2\vec{u}-\vec{v})$

Fecha: X. 16.3.1988   Tiempo: 1h 30'   Tema: Álgebra

1p ① Definición de sistema libre

② Siendo $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \longrightarrow (2x-z,\ 3y+2z)$ y $B = \{(3,2),(2,1)\}$, se pide:

1p a) Demostrar que B es base de $\mathbb{R}^2$
   b) " " f es aplicación lineal

2p c) Hallar $M(f;\ C_3, B)$

1p ③ Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

2p ④ Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$, calcular

a) $A^2 + B^t$ b) A^{-1} c) B^{-1} d) $AB - BA$

1p ⑤ Clasificar y resolver

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 3y - 4z = -3 \\ 7x - 6y - z = -3 \end{cases}$$

2p ⑥ Discutir

$$\begin{cases} Kx + y = 0 \\ 8x + (K-2)y = K-4 \end{cases}$$

Para elevar calificación

① Siendo $(V,+,\cdot)$ e.v. sobre $(\mathbb{R},+,\cdot)$ y $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\} \subset V$ sistema libre, demostrar que $\{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c},\ \bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}\}$ es libre. ¿Lo es $\{\bar{a}+\bar{c},\ \bar{a}-\bar{c},\ \bar{a}\}$?

② Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes. ¿Qué relación hay entre las dimensiones de sus matrices de coef.? ¿Y entre sus rangos?

2p. (1) Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar

AB, BA, A^2, $2A - 3B^t$, $rg(A)$, $rg(B^t)$, $\det((BA)^2)$, $\det(A^t)$

2p. (2) Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(3) Siendo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \to (2x-y, 2y+z, 3z)$ y $B: \{(1,0,0), (0,2,1), (0,-1,1)\}$

Se pide:

0.5p. a) Hallar $coord_B(3,4,-5)$

2p. b) Hallar $M(f; B, B)$

0.5p. c) Hallar $coord_B(f(3,4,-5))$

1p. (4) Clasificar y resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 5y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

2p. (5) Discutir el sistema $\begin{cases} mx - y = 0 \\ 3x + y + z = 2 \\ x + my + z = m \end{cases}$

Subir nota

(1) Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación $|A - xI| = 0$

(2) Sean $(V, +, \cdot)$ e.v. sobre $(K, +, \cdot)$ y $S = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$, $T = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$

¿ $S \wedge T$ ligados $\Rightarrow$ $S \cup T$ ligado ?

¿ $S \wedge T$ ligados $\Rightarrow$ $S \cap T$ ligado ?

¿ $S \wedge T$ libres $\Rightarrow$ $S \cup T$ libre ?

¿ $S \wedge T$ libres $\Rightarrow$ $S \cap T$ libre ?

¿ $S \wedge T$ s.g. $\Rightarrow$ $S \cup T$ s.g. ?

¿ $S \wedge T$ s.g. $\Rightarrow$ $S \cap T$ s.g. ?

Curso de Orientación Universitaria

Examen de primer parcial (para elevar la calificación)

Fecha: M.6.12.1983 Tema: "Álgebra lineal"

1. Sean $(V,+,\cdot)$ y $(W,+,\cdot)$ dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $(K,+,\cdot)$. Llamaremos $\vec{0}_V$ y $\vec{0}_W$ a los elementos neutros para la suma de V y W, respectivamente. Sea $f\in\mathcal{L}(V,W)$. Demostrar:
a) $f(\vec{0}_V)=\vec{0}_W$ b) $\forall\vec{u}\in V$: $f(-\vec{u})=-f(\vec{u})$
2. Con todas las notaciones del problema nº 1, sea también g una aplicación de $\mathcal{L}(V,W)$. Se define la aplicación $(f+g)$ así:
$$(f+g)(\vec{u})=f(\vec{u})+g(\vec{u})$$
Demostrar que $(f+g)\in\mathcal{L}(V,W)$.
3. Calcular det(AB)
4. Escribir un sistema no homogéneo compatible con grado de indeterminación 1 que tenga 3 ecuaciones y 3 incognitas. Justificar la respuesta.
5. Demostrar que todos los sistemas de ecuaciones lineales con 5 incognitas y 3 ecuaciones tienen infinitas soluciones.

Valor de cada pregunta: dos puntos.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 2 & -3 \\ 2 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \pi & 2\pi & e & -e \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 8 & 15 \\ \sqrt{7} & \operatorname{Ln} 2 & -3 & 0 \\ e^3 & e^2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Geometría

1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$

Producto escalar

Se llama producto escalar a cualquier aplicación

$$\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}$$ que sea

1. Simétrica
2. Bilineal
3. Definida positiva
4. No degenerada

E. v. euclídeo

Es un e. v. en el que hay definido un p.e.

P. e. usual

Es la aplicación $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Proposición

El p.e.u. es un p.e., luego $\mathbb{R}^3$ es un e.v.e.

Demostración

(...)

Ortogonalidad

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ se dice que son ortogonales o perpendiculares

cuando $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Se escribe $\vec{a} \perp \vec{b}$

Problema práctico

Dado un vector, encontrar rápidamente un vector perpendicular a él.

Módulo de un vector

Módulo o norma de $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ es $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Con el p.e.u. : $|(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Se dice que $\vec{a}$ es unitario cuando $|\vec{a}| = 1$

Proporcionalidad

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ se dice que son proporcionales, o que uno

es múltiplo del otro, cuando

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Obsérvese que si son proporcionales son l. d. y viceversa

Problema práctico

Dados dos vectores no nulos, averiguar rápidamente si son pr. o no.

Si uno tiene una componente cero el otro también la debe tener y las no nulas deben ser proporcionales

Proposición

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \ |\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

Demostración

(...)

Normalización de un vector

Es encontrar otro, múltiplo suyo, que sea unitario.

Para conseguirlo basta dividir el vector por su norma: (...)

Angulo entre dos vectores

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

Lema: $\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \in [-1, 1]$

Definición: $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \arccos \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \in [0, \pi]$

Consecuencia: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

Observación: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$

2. Bases de un espacio euclídeo

Sistema ortogonal $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\} \subset V$ es un s.o. $\Leftrightarrow \forall i \neq j : \vec{u}_i \perp \vec{u}_j$

Bases ortogonales y ortonormales

1. Una base es ortogonal cuando es un s.o.

2. Una base es ortonormal cuando es ortogonal y sus vectores son unitarios.

Prop. sist. ortog. $\Rightarrow$ sist. libre

Condición de independencia de tres vectores

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ libre} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Demostración

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ libre} \Leftrightarrow [\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0]$$

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \Leftrightarrow [S] \left\{ \begin{array}{l} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = 0 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0 \end{array} \right. ; \quad C = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_3 \end{pmatrix}$$

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ libre $\Leftrightarrow [S]$ sólo tiene sol. trivial $\Leftrightarrow rg(C) = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |C| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ejemplo

a) Usuales

b) Dem. $\mathcal{B}$ base

E ¿Cómo encontrar con rapidez un vector perpendicular a otros dos?

Producto vectorial

Se busca definir una aplicación

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\vec{a},\vec{b}) \longrightarrow \vec{a}\times\vec{b}$$ que verifique

1. Bilineal
2. Antisimétrica $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
3. $\vec{u}\times\vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$

Si llamamos $C_3 = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, es fácil demostrar que la aplicación

$$(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ verifica las tres propiedades

A esta aplicación se le llama producto vectorial.

Se cumple $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\,\mathrm{sen}(\vec{a},\vec{b})$

Obtención de bases ortonormales

$\vec{a}\in\mathbb{R}^3-\{\vec{0}\} \longrightarrow \vec{b}\perp\vec{a} \longrightarrow \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b} \longrightarrow$

$\longrightarrow \{\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\}$ ortogonal $\longrightarrow$ Normalizar.

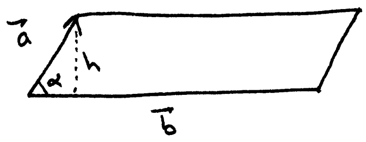
Producto mixto

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$$

Si $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=\dots$, entonces $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

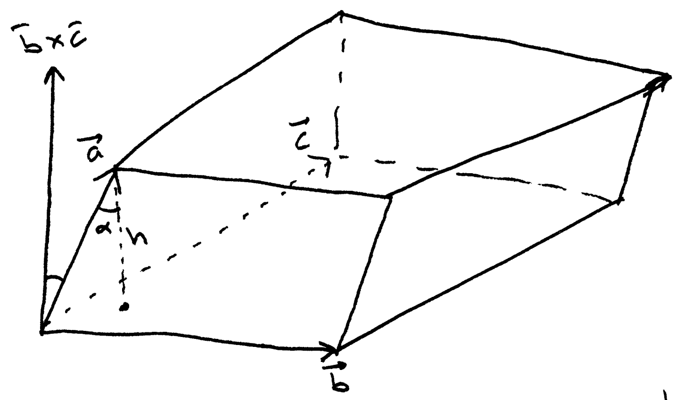
Demostración (...)

Área de un paralelogramo



$$S = \text{base}\times h = |\bar{b}|\cdot h = |\bar{b}|\,|\bar{a}|\,\operatorname{sen}\alpha = |\bar{a}\times\bar{b}|$$

Volumen de un paralelepípedo



$$\text{Volumen} = h\cdot(\text{área de la base}) =$$

$$= |\vec{a}|\cos\alpha\,|\bar{b}\times\bar{c}| =$$

$$= |\bar{a}|\bullet|\cos\measuredangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c})|\cdot|\bar{b}\times\bar{c}| =$$

$$= \big|\,|\bar{a}|\cdot|\bar{b}\times\bar{c}|\cdot\cos\measuredangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c})\big| =$$

$$= |\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})| = |(\bar{a},\bar{b},\bar{c})|$$

Observación

$\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ libre $\iff \left|\quad\right| \neq 0 \iff (\bar{a},\bar{b},\bar{c}) \neq 0 \iff$ Volumen $\neq 0$

Volumen de un tetraedro

$$V = \frac{1}{6}\,|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})|$$

GM7

3. Variedades lineales

Ⓔ Subestructuras (¡fractales!)

Son subc. de $\mathbb{R}^3$ que tiene estructura de e.v. : subespacios vectoriales

Rectas vectoriales

R.v. es una recta que pasa por el origen. También se llama variedad lineal de dim. 1

$\vec{v} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\} \Rightarrow L[\vec{v}] = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ es la recta vectorial generada por $\vec{v}$, que se llama v. d. de la recta.

Ecuaciones de la r.v.

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$, $\vec{w} = (x, y, z) \in L[\vec{v}]$

$\vec{w} = \lambda \vec{v}$ (Ec. vectorial) $\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda v_1 \\ y = \lambda v_2 \\ z = \lambda v_3 \end{cases}$ (Ecs. paramétricas) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{v_1} = \frac{y}{v_2} = \frac{z}{v_3}$ (Ec. continua) $\Rightarrow \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$ (Ecs. impl.)

Proposición

$L[v] = L[\alpha \vec{v}]$

Planos vectoriales

P.v. es un plano que pasa por el origen. También se llaman v.l. de dimensión 2.

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ l.i.

$L[\vec{u},\vec{v}] = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ es el p.v. generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Proposición

$L[\vec{u},\vec{v}] = L[\alpha\vec{u},\beta\vec{v}]$

Ecuaciones del p.v.

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ l.i. y $\vec{w} = (x,y,z) \in L[\vec{u},\vec{v}]$

$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ (Ec. vectorial) $\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$ (Ecs. paramétricas) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $ax + by + cz = 0$ (Ec. implícita o general.)

4. El espacio afín $\mathbb{R}^3$

(E) Vectores, puntos, vectores asociados

Definición de espacio afín

Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto y $(V, +, \cdot)$ un e.v.

Se dice que $(A, +)$ es un espacio afín con e.v. asociado $(V, +, \cdot)$

cuando $+ : A \times V \to A$
$(P, \vec{v}) \to P + \vec{v}$ es una aplicación que verifica:

1. $\forall P \in A \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \quad (P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$

2. $P + \vec{v} = P \iff \vec{v} = \vec{0}$

3. $\forall P, Q \in A \ \exists \vec{v} \in V \mid P + \vec{v} = Q$

Llamaremos puntos a los elementos de A

Propiedades

I. $\forall P, Q \in A \ \exists! \vec{v} \in V \mid P + \vec{v} = Q$.

Por tanto podemos llamar $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ y $\boxed{P + \overrightarrow{PQ} = Q}$

II. $\forall P, Q, R \in A : \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

III. $\forall P, Q \in A : \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Demostración

I. Por (3) $\exists \vec{v}$

Sup. $\exists \vec{u}, \vec{v} \in V \mid P + \vec{u} = Q \wedge P + \vec{v} = Q$

$$P + (\vec u + (-\vec v)) \overset{1}{=} (P+\vec u) + (-\vec v) = Q + (-\vec v) =$$

$$= (P+\vec v) + (-\vec v) \overset{1}{=} P + (\vec v + (-\vec v)) = P + \vec 0 \overset{2}{=} P \Rightarrow$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} u + (-\vec v) = \vec 0 \Rightarrow \vec u = \vec v$$

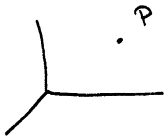
II $\quad P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \dots = R \Rightarrow \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

III. $\quad P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}) = \dots = P \Rightarrow \dots \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Mejor: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \vec 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Definición

$\mathbb{M}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$, como conj. de puntos.



Denotaremos sus elementos con mayúsculas

Traslación

Siendo $\vec v \in \mathbb{R}^3$, se llama "traslación de vector $\vec v$" a la aplicación

$\tau_{\vec v} : \mathbb{M}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\tau_{\vec v}(p_1, p_2, p_3) = (p_1 + v_1, \dots)$

Notación: $\tau_{\vec v}(P) = P + \vec v$

Teorema

Definiendo $+ : \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{M}^3$

$(P, v) \longrightarrow P + v \quad (= \tau_v(P))$ se verifica

que $(\mathbb{M}^3, +)$ es un e.a. con e.v.a. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

Demostración

(...)

Ejercicios

Hallar vértices de figuras ...

Esp. afín euclídeo

Un espacio afín se dice que es euclídeo cuando su espacio vectorial asociado lo es. Por tanto $(\mathbb{R}^3, +)$ es un esp. afín euclídeo.

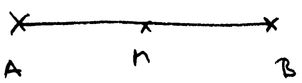
Distancia entre dos puntos

$\forall\ P, Q \in A$ se define $d(P,Q) = |\vec{PQ}|$

En el caso usual

$$d((p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3)) = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$$

Punto medio de un segmento



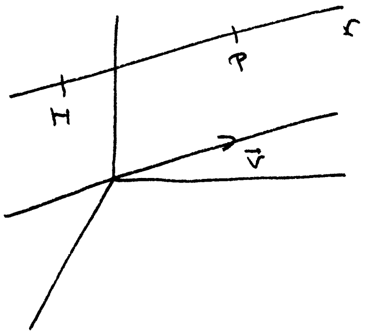
$$M = A + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

5. Variedades afines

Son subconj. de un espacio afín que también tienen estructura de e.a.

Las variedades afines de $\mathbb{R}^3$ son las rectas y los planos, que a veces son llamados rectas afines y planos afines

Ecuaciones de la recta



Sea r una recta que pasa por $H=(h_1,h_2,h_3)$

Hay una recta vectorial paralela a ella, que tendrá v. d. $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, al que llamaremos vector director de r ($\vec{v}_r$)

r es la traslación de la recta vectorial mediante el vector $\overrightarrow{OH}$

$$P \in r \iff \begin{cases} \overrightarrow{HP} = \lambda \vec{v} \\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \lambda \vec{v} \\ P = H + \lambda \vec{v} \end{cases} \quad \text{(Ec. vectorial)} \implies \begin{cases} x = h_1 + \lambda v_1 \\ y = h_2 + \lambda v_2 \\ z = h_3 + \lambda v_3 \end{cases} \quad \text{(Ecs. paramétricas)}$$

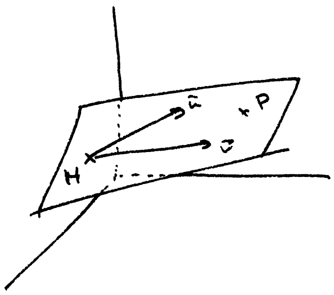
Despejando λ: $\dfrac{x-h_1}{v_1} = \dfrac{y-h_2}{v_2} = \dfrac{z-h_3}{v_3}$ (Ec. continua). $\implies$

$$\implies \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{(Ecs. implícitas)}$$

Ejemplo

[Poner alguna 0 en $\vec{v}$]

Ecuaciones del plano



Sea π un plano que pasa por $H=(h_1,h_2,h_3)$.

Hay un plano vectorial paralelo a él que estará generado por dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, que llamaremos generadores de π.
(" , ")

π es la traslación del plano vectorial mediante $\overrightarrow{OH}$

$$P\in\pi \iff \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{HP}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v} \\ \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OH}+\lambda\bar{u}+\mu\bar{v} \\ P=H+\lambda\bar{u}+\mu\bar{v}\end{array}\right. \quad (\text{Ec. vectorial}) \implies \left\{\begin{array}{l} x=h_1+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=h_2+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=h_3+\lambda u_3+\mu v_3\end{array}\right. \quad (\text{Ecs. param.})$$

Quitando los parámetros: $ax+by+cz+d=0$ (Ec. implícita o general)

También se puede obtener ésta así:

$$\overrightarrow{HP}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{v} \implies \overrightarrow{HP},\bar{u},\bar{v} \text{ l. dep.} \implies \begin{vmatrix} x-h_1 & y-h_2 & z-h_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0$$

Ejemplos

[Poner O en $\bar{u}$ y $\bar{v}$]

Vector normal a un plano

Diremos que un vector es normal o perpendicular a un plano cuando es perpendicular a todos los vectores que lo generan.

Sea $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ un plano y $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3) \in \pi$

$$\left.\begin{array}{l} ap_1+bp_2+cp_3+d=0 \\ aq_1+bq_2+cq_3+d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cdots \Rightarrow (a,b,c) \perp \overrightarrow{QP} \Rightarrow (a,b,c) \perp \pi$$

A un vector normal a π le llamaremos $\vec{n}_\pi$

Consecuencias

1. Calcular la ec. gen. de un plano que pase por un punto conocido un vector normal.
2. Id. conocidos dos vectores generadores
3. Dada la ec. gen. calcular vectores generadores

Casos particulares

1. Planos paralelos a los planos coordenados

   Si pasan por (x_0, y_0, z_0) son $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$

   (Por consecuencia 1)

2. Recta paralela a los ejes

   (Por intersección de planos)

Problema

Dada la ecuación de una v. afín, pedir puntos, v. s. y normales

Importante

$r \perp \pi \Rightarrow \vec{v_r} = \vec{n_\pi}$

Algunos tipos de problema

1. Recta que pasa por dos puntos
2. Plano que pasa por tres puntos
3. Plano en implícita a plano en paramétricas
4. Recta en implícitas a recta en paramétricas
5. Plano paralelo a otro que pase por un punto
6. Recta paralela a otra que pase por un punto
7. Posición relativa de dos planos
8. " " " " rectas
9. Plano perpendicular a una recta que pase por un punto
10. Recta " " un plano " " " " "
11. " " " una recta " " " " "
12. Simétrico de un punto respecto a un punto
13. Id. plano
14. Id. recta
15. Perpendicular común a dos rectas.

GM16

Posición relativa de dos planos (definición)

1. Paralelos
2. Secantes (caso particular, perpendiculares)
3. Coincidentes

Posición relativa de dos rectas (definición)

1. Paralelas
2. Secantes
3. Se cruzan
4. Coincidentes

Posición relativa de recta y plano (definición)

1. Paralelos
2. Secantes
3. Recta contenida en el plano

Ángulo entre dos rectas

Se define $\measuredangle(r,s) = \measuredangle(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$ y se suele tomar el menor de los dos posibles, que son suplementarios.

Ángulo entre dos planos

[Definirlo con dibujo]

Se calcula $\measuredangle(\pi, \Sigma) = \measuredangle(\vec{n}_\pi, \vec{n}_\Sigma)$ y se ....

Ángulo entre recta y plano

[Definirlo con dibujo]

Se calcula $\measuredangle(\pi, r) = \left| \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\vec{n}_\pi, \vec{v}_r) \right|$

Pos. rel. de dos planos (est. geom.)

$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$, $\pi' \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$

a) $(a, b, c) = \lambda (a', b', c') \Rightarrow$ coincidentes o paralelos

i) $d = \lambda d' \Rightarrow$ coincidentes

ii) $d \neq \lambda d' \Rightarrow$ paralelos

b) $(a, b, c) \neq \lambda (a', b', c')$ secantes

Pos. rel. de dos rectas (est. geom.)

Sean r una recta que pasa por A y tiene v. d. $\vec{u}$ y
s " " " " " B " " " $\vec{v}$

a) $\vec{u} = \lambda \vec{v} \Rightarrow$ paralelas o coincidentes

i) $A \in s \Rightarrow$ coincidentes

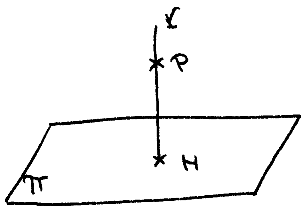
ii) $A \notin s \Rightarrow$ paralelas

b) $\vec{u} \neq \lambda \vec{v} \Rightarrow$ secantes o se cruzan

i) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ l. d. $\Rightarrow$ secantes

ii) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ l. i. $\Rightarrow$ se cruzan.

Distancia de un punto a un plano



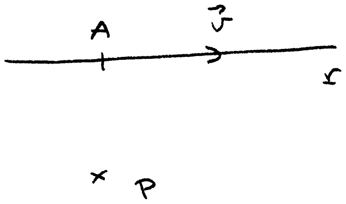
$$P = (p_1, p_2, p_3) \quad , \quad \pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

$$r \equiv (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda (a, b, c) = (p_1 + \lambda a, \dots$$

$$H \in \pi \Rightarrow a(p_1 + \lambda a) + \dots = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-(ap_1 + bp_2 + cp_3 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d(P, \pi) = d(P, H) = \dots = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distancia de un punto a una recta



$$d(P, r) = d(P, \pi(A; \vec{v}, \vec{v} \times \vec{PA}))$$

GM - P1

S sist. $| \forall \vec{u}, \vec{v} \in S : \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow S$ libre

Distancia entre recta y plano //

plano paralelo

recta paralela

Posición relativa de recta y plano (geom.)

Recta que pase por un punto y corta a otras dos.

Decir 4 puntos que forman tetraedro regular

Dados los puntos $A = (1,2,-2)$, $B = (3,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$, encontrar los puntos $C \in \pi \mid \widehat{ABC}$ es isósceles. ¿Qué figura geométrica forman? Discutir el sistema en general.

Hallar el centro y el radio de la circunferencia

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Dem. sup. $\triangle$ det. por $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ es $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Tipos de problemas. ***Tema: Geometría.*** **Fecha: X.5.2.1992**

1. Recta que pasa por dos puntos.
2. Plano que pasa por tres puntos.
3. Plano en implícita a plano en paramétricas.
4. Recta en implícitas a recta en paramétricas.
5. Plano que pase por un punto y sea paralelo a otro plano.
6. Recta que pase por un punto y sea paralela a otra recta.
7. Posición relativa de dos planos.
8. Posición relativa de dos rectas.
9. Plano que pase por un punto y sea perpendicular a una recta.
10. Recta que pase por un punto y sea perpendicular a un plano.
11. Recta que pase por un punto y sea perpendicular a una recta.
12. Simétrico de un punto respecto a otro punto.
13. Simétrico de un punto respecto a un plano.
14. Simétrico de un punto respecto a una recta.
15. Recta perpendicular común a dos rectas.

2º PARCIAL

1. Sean los vectores de $\mathbb{R}^3$: $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,2,0)$, $(2,1,0)$, $(3,2,1)$, $(0,-1,2)$, $(5,3,4)$

   a) Hallar sus módulos

   b) ¿Cuántas parejas distintas se pueden considerar?

   c) Hallar los productos escalares de todas las parejas.

   d) Decir cuáles están formadas por vectores perpendiculares.

   e) Hallar los ángulos que forman cada pareja. (en grados y minutos sexagesimales)

2. a) Poner un ejemplo de base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que no sea ortonormal.
   b) Id. de base ortonormal que no sea C.

3. Calcular la ecuación vectorial de los siguientes planos de dos formas distintas.

   a) $3x+2y-z=0$ b) $x=0$ c) $-y+3z=0$

4. Dar una base ortonormal en la que uno de los vectores sea múltiplo del $(1,1,1)$

5. Dar un vector perpendicular al plano $\begin{cases} x=-\mu \\ y=\lambda+2\mu \\ z=3\lambda+\mu \end{cases}$ y que tenga módulo 23

6. Hallar la recta perpendicular a los planos $3x+2y-z=0$ y $-y+3z=0$.

7. Ecuaciones del plano que pasa por los puntos $(-1,0,-1)$, $(3,4,0)$, $(-1,2,3)$

8. Dar las ecuaciones de dos rectas que estan contenidas en el plano anterior

9. Ecuaciones de un plano perpendicular a la recta $\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-5+2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$ y que pase por $(1,0,1)$

10. Ecuaciones del plano que contiene a las rectas $x=y=z$ y

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{4}$$

Fecha: X. 20.4.1988 Tiempo: 1.5 h

2p. (1) Definición de espacio afín. Demostrar que si: P, Q y R son puntos de un espacio afín entonces $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

1p. (2) Estudiar la posición relativa de r y s

1p. (3) Hallar las ecuaciones de la paralela a r que pasa por A

1p. (4) Calcular el ángulo que forman π y Σ

2p. (5) Encontrar el simétrico de A respecto a π

1p. (6) Calcular el volumen del tetraedro determinado por A, B, C y D

2p. (7) Hallar las ecuaciones de la recta perpendicular común a t y w

Datos $r \equiv \begin{cases} x+z-17=0 \\ x+y-z+11=0 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} 4x-z-18=0 \\ y+8=0 \end{cases}$ $\pi \equiv 2y+3z-44=0$

$\Sigma \equiv (x,y,z) = (0,1,0) + \lambda(1,2,1) + \mu(1,3,-2)$ $t \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

$w \equiv \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$ $A=(1,1,1)$, $B=(0,2,1)$, $C=(6,1,-1)$, $D=(2,3,4)$

Elevar la calificación.

(1) Hallar cuatro puntos que formen un tetraedro de volumen dado V.

(2) Dados los puntos $A=(1,2,-2)$, $B=(3,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z=0$, encontrar los puntos $C \in \pi$ tales que $\widehat{ABC}$ es isósceles. ¿Qué figura geométrica forman? Dependiendo de la posición relativa de A, B y π, estudiar las soluciones que pueda tener el problema.

C.O.U. Recuperación 2ª Evaluación.

2p (1) Demostrar que el producto escalar usual es un producto escalar

2p (2) Decir las ecuaciones de dos rectas paralelas entre sí que no lo sean a ningún eje coordenado

1p. (3) Calcular el ángulo que forman los planos

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 8 = 0$$

$$\Sigma \equiv (0,0,2) + \lambda(1,1,1) + \mu(2,-1,3)$$

1p (4) Calcular el volumen del tetraedro determinado por los puntos

$(0,1,0)$, $(2,3,1)$, $(-1,5,2)$ y $(8,1,4)$

2p (5) Hallar las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

2p. (6) Encontrar el simétrico del punto $(2,1,0)$ respecto al plano π

Elevar la calificación.

(1) Decir las coordenadas de cuatro puntos que formen un tetraedro regular

(2) Hallar el centro y el radio de la circunferencia $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=5 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Curso de Orientación Universitaria

Examen de segundo parcial para dever calificación.

Fecha: M. 21. 2. 1984 Tema: "Geometría".

1. Sean $r_1 \equiv \begin{cases} x + 3z + 1 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$,

$r_3 \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - z + 3 = 0 \end{cases}$, $\pi \equiv 2x + 3y + z - 3 = 0$

Demostrar que las tres rectas se cortan en un punto, que llamamos A. Los puntos de corte de r_1, r_2 y r_3 con π son llamados B, C y D respectivamente. Calcular el área del triángulo $\widehat{DBC}$ y el volumen del tetraedro ABCD.

2. Explicar un método para resolver el siguiente problema:

Dadas tres rectas concurrentes, encontrar un plano de modo que el triángulo definido por los puntos de corte sea equilátero.

¿Cuántas soluciones tiene el problema? Demostrarlo.

Cálculo diferencial

1. Nocions de topología

Definiciones de acotación

Sea $E \subset \mathbb{R}$

1. $K \in \mathbb{R}$ cota sup. de $E \iff \forall x \in E : x \leq K$
2. inf.
3. E acotado superiormente $\iff \exists K \in \mathbb{R} \mid K$ es cota superior de E
4. inferiormente
5. E acotado $\iff E$ acotado sup. e inf.
6. Si E está ac. sup., se llama supremo de E ($\sup(E)$) a la menor de las cotas sup.
7. ínfimo
8. Si $\sup(E) \in E$, se llama máximo de E ($\max(E)$)
9. mínimo

Ejemplos

Los intervalos

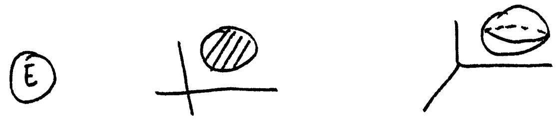
Distancia en $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |x-y|$$

Definición de bola

Sean $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$. Bola de centro x y radio ε es

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x,y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$



Entornos de un punto

Sean $x \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$. Se dice que E es un entorno de x cuando

$\exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid x \in B(x, \varepsilon) \subset E$.

Los entornos de x se suelen designar como V^x

Si a V^x se le suprime el punto x, el conjunto obtenido se llama entorno perforado de x: $V^x - \{x\}$

Imagen de un conjunto mediante una función

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $E \subset \mathbb{R}$

$f(E) = \{ f(x) \mid x \in E \}$

Definiciones de continuidad

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. f continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall\, V^{f(x_0)}\ \exists\, V^{x_0} \mid f(V^{x_0}) \subset V^{f(x_0)}$

   .....

   $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. f continua por la derecha en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

3. izquierda

4. f continua en $(a,b) \Leftrightarrow f$ cont. en x, $\forall x \in (a,b)$

5. f continua en $[a,b] \Leftrightarrow f$ cont. en (a,b), cont. por la derecha en b y por la izq. en a

6. $\mathcal{C}([a,b]) = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f$ continua en $[a,b] \}$

Propiedades

$f, g \in \mathcal{C}([a,b])$

1. $f+g,\ f\cdot g \in \mathcal{C}([a,b])$

2. $\forall x \in [a,b] : g(x) \neq 0 \iff \frac{f}{g}$ cont. en $[a,b]$

Axioma de Cantor [SOLO EXPLICAR, EQUIVALENCIAS]

Sea $\{ I_n = [a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N} \}$ una sucesión de intervalos cerrados encajados $(\forall n \in \mathbb{N} : I_n \subset I_{n+1})$ y con $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Entonces $\exists!\ \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

Proposición

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, existe un entorno de x_0 en el que la función tiene el mismo signo que f.

Demostración

[En Tercero de B.U.P.]

Consecuencia

Si en todo entorno de x_0 la función continua f toma valores de distinto signo, $f(x_0) = 0$

Teorema de Bolzano

Sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$ | $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo.

Entonces $\exists\, \alpha \in [a,b]$ | $f(\alpha) = 0$

Demostración [SOLO CONTARLO]

Si $f(a) = 0$ ó $f(b) = 0$, trivial

Si $f(a) \neq 0 \neq f(b)$, por divisiones sucesivas de $[a,b]$ se obtiene

$\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ verificando

$sg(f(a)) = sg(f(a_n))$; $sg(f(b)) = sg(f(b_n))$

$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

Por el axioma de Cantor $\exists\, \alpha \in \bigcap [a_n, b_n]$

En cualquier entorno de α f toma valores de distinto signo,

luego $f(\alpha) = 0$

Ejemplo

Consecuencia (Teorema de Darboux)

Si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $f(a) \neq f(b)$ y m es un valor cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces $\exists \alpha \in [a,b] \mid f(\alpha) = m$

Demostración

$F(x) = f(x) - m$

Función acotada

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada $\Leftrightarrow$ $f([a,b])$ acotado

Obsérvese que f acotada $\Leftrightarrow \exists K_1, K_2 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [a,b] : K_1 \leq f(x) \leq K_2$

Teorema

Sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$

1. f es acotada
2. f alcanza máx. y mín absolutos, es decir, $\exists$ máx $(f([a,b]))$ $\wedge$ mín.

Demostración [SUPRIMIR]

1. Sup. f no acotada. Divisiones sucesivas $\to [a_n, b_n]$ en los que f no acotada

Axiom de Cantor $\to \exists \alpha \in \bigcap [a_n, b_n]$

f cont. en $\alpha \Rightarrow \exists \delta > 0 \mid x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\alpha) - 1, f(\alpha) + 1)$

$\exists n \in \mathbb{N} \mid [a_n, b_n] \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$

$x \in [a_n, b_n] \Rightarrow x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\alpha) - 1, f(\alpha) + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\alpha) - 1 < f(x) < f(\alpha) + 1 \quad \forall x \in [a_n, b_n] \Rightarrow f$ ac. en $[a_n, b_n]$, contr.

CD 6

2. Por (1), f acotada, luego $\exists\, \sigma = \sup f([a,b])$

Sup. $\forall x \in [a,b] : f(x) < \sigma \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\sigma - f(x)}$ cont. $\Rightarrow$

$\Rightarrow F$ acotada $\Rightarrow \exists\, K \in \mathbb{R} \mid K > 0 \wedge \dfrac{1}{\sigma - f(x)} \leq K \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] : f(x) \leq \sigma - \dfrac{1}{K} \Rightarrow \sigma - \dfrac{1}{K}$ cota sup. de

$f([a,b])$, contradicción, luego $\exists\, x_0 \in [a,b] \mid f(x_0) = \sup f[a,b]$

y $\sup f([a,b]) \in f([a,b])$, luego es máximo.

f cont. $\Rightarrow -f$ cont. $\Rightarrow -f$ alcanza mx. ab. $\Rightarrow f$ alcanza mn. abs.

2. Teoremas de cálculo diferencial

Mx. y mn. abs. y rel.

No tienen ninguna relación. Dibujos

Teorema de Rolle

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ verificando

1. Continua en $[a,b]$
2. Derivable en (a,b)
3. $f(a) = f(b)$

Entonces $\exists\ \alpha \in (a,b) \mid f'(\alpha) = 0$ Dibujos

Demostración

I) f cte.

II) f no constante

f cont. $\Rightarrow$ f alcanza mx. y mn. absoluto en dos puntos.

Como $f(a) = f(b)$, alguno de los dos es distinto de a y b.

Llamémosle α. En α hay un mx. o min. rel.,

luego $f'(\alpha)=0$

Tma. del valor medio (Tma. Cauchy) (T.v.m. generalizado)

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones verificando

1. Continuas en $[a,b]$
2. Derivables en (a,b)

Entonces $\exists\ \alpha \in (a,b) \mid (f(b) - f(a))\, g'(\alpha) = (g(b) - g(a))\, f'(\alpha)$

Si $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$, $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

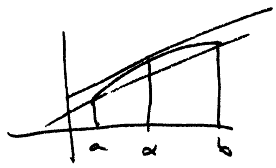
Demostración

$F(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$

Tma. de los incrementos finitos (Tma. Lagrange) (T.v.m.)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función que verifica:

1. Continua en $[a,b]$
2. Derivable en (a,b)



Entonces $\exists\ \alpha \in (a,b) \mid f(b) - f(a) = f'(\alpha)(b-a)$

Demostración

Tomando $g(x) = x$ en el Tma. Cauchy

Consecuencia

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces

1. $\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente en $[a,b]$
2. $\qquad = \Rightarrow$ constante
3. $\qquad < \Rightarrow$ decreciente.

Demostración

Tomemos $x, y \in [a,b] \mid x < y$

Aplicamos el tma. incr. finitos a $f: [x,y] \to \mathbb{R}$.

$\exists\, \alpha \in (x,y) \mid f(y) - f(x) = (y-x) f'(\alpha)$

1) $f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow f$ creciente

2) $f(y) - f(x) = 0 \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow f$ cte.

3) $f(y) - f(x) < 0 \Rightarrow f(y) < f(x) \Rightarrow f$ decreciente.

Regla de L'Hôpital

Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ verificando

1. $\exists V^{x_0} \mid f, g$ derivables en V^{x_0}
2. $f(x_0) = g(x_0) = 0$
3. Existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración

$\forall x \in V^{x_0} \ \exists \alpha$ entre x y $x_0 \mid \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$. Por tanto

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \lim_{\alpha \to x_0} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$, c.q.d.

Observación

También es aplicable la regla de L'Hôpital cuando el límite es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y cuando $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$

3. Crecimiento y convexidad

Polinomio aproximador

Sea $a \in \mathbb{R}$ y f una función suficientemente derivable en U^a

Queremos aproximar f mediante un polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1 (x-a) + \dots + a_n (x-a)^n$$

La aproximación se conseguirá haciendo que f y P_n y sus n primeras derivadas coincidan en a.

$$f(a) = P_n(a) \Rightarrow f(a) = a_0$$

$$f'(a) = P_n'(a) \Rightarrow f'(a) = a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$

....

$$f^{(n}(a) = P_n^{(n}(a) \Rightarrow f^{(n}(a) = n!\, a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n}(a)}{n!}$$

Por tanto $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \dfrac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n =$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Llamaremos a P_n "polinomio aproximador de grado n de la función f en un entorno de a"

Expresión del error

El error cometido cuando se sustituye $f(x)$ por $P_n(x)$ es

$T_n(x) = f(x) - P_n(x)$, luego se puede escribir $f(x) = P_n(x) + T_n(x)$

T_n se llama término complementario de orden n.

Se puede demostrar que $\exists\ \alpha$ entre a y x que verifica:

$$T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$, expresión llamada "forma de Lagrange del término complementario"

Fórmula de Taylor

$$f(x) = P_n(x) + T_n(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ con

α entre a y x

"Desarrollo de Taylor de orden n de la función f en un entorno de a"

Fórmula de Mac Laurin

El "desarrollo de Mac Laurin de orden n de la función f" se obtiene haciendo $a=0$ en la fórmula de Taylor.

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \dots + \frac{f^{(n}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}x^{n+1}$$ con α entre 0 y x

Desarrollos notables

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\alpha}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(n+1)(\alpha+1)^{n+1}} x^{n+1}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\operatorname{sen}\alpha}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)\frac{\operatorname{sen}\alpha}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

Definiciones sobre crecimiento

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ continua en $a \in \mathbb{R}$

1. f creciente en $a \iff \exists V^a \mid \forall x \in V^a : \begin{cases} x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{cases}$

2. decreciente

3. f tiene máx. rel. en $a \iff \exists V^a \mid \forall x \in V^a - \{a\} : f(x) < f(a)$

4. mín.

Estudio del crecimiento

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ suficientemente derivable en un entorno V^a suf. pequeño de a.

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1}(a) = 0 \neq f^{(k}(a)$

El desarrollo de Taylor de orden $k-1$ asegura que

$$\forall x \in V^a - \{a\} \ \exists \ \alpha \text{ entre } a \text{ y } x \mid f(x) = f(a) + \frac{f^{(k}(\alpha)}{k!}(x-a)^k$$

$$k \text{ impar} \begin{cases} f^{(k}(a) > 0 \Rightarrow f^{(k}(\alpha) > 0 \Rightarrow \left. \begin{cases} x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{cases} \right\} \Rightarrow f \text{ crec. en } a \\ \qquad < \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{decrec.} \end{cases}$$

$$k \text{ par} \begin{cases} f^{(k}(a) > 0 \Rightarrow f(x) > f(a) \Rightarrow f \text{ tiene mn. rel. en } a \\ f^{(k}(a) < 0 \Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \text{mx.} \end{cases}$$

Ejemplo

Est. crec. de una función en un punto

Regla mx. y mn.

1. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n$. Para cada x_i:

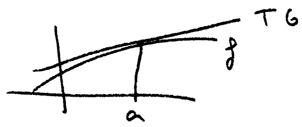
2. Hallar k

3. k impar $\rightarrow$ ni mx. ni mn. rel.

   k par $\rightarrow \begin{cases} f^{(k}(x_i) > 0 \rightarrow \text{mn. rel.} \\ f^{(k}(x_i) < 0 \rightarrow \text{mx. rel.} \end{cases}$

Definiciones sobre convexidad

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ derivable en $a \in \mathbb{R}$ y $TG(x)$ la tangente a f en a



1. f convexa en a $\Longleftrightarrow$ $\exists V^a \mid \forall x \in V^a - \{a\} : f(x) < TG(x)$
2. cóncava $>$
3. f tiene un p.i. en a $\Longleftrightarrow$ f pasa de cóncava a convexa en a o viceversa, es decir: $\exists V^a \mid \forall x \in V^a - \{a\} : f(x) < TG(x)$ y $f(x) > TG(x)$ al otro.

Estudio de la convexidad [SOLO RESULTADO]

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ suf. deriv. en un entorno V^a suf. peq. de a

Supongamos que $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(k-1}(a) = 0 \neq f^{(k}(a)$

El desarrollo de Taylor de orden $k-1$ de f asegura que

$\forall x \in V^a - \{a\}$ $\exists \alpha$ entre a y x $\mid$ $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f^{(k}(\alpha)}{k!}(x-a)^k$

$y = TG(x) = mx + q \Rightarrow y' = m = f'(a)$

Como $TG(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, resulta

$$f(x) = TG(x) + \frac{f^{(k}(\alpha)}{k!}(x-a)^k$$

→ k par $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{(k}(a) > 0 \Rightarrow f^{(k}(\alpha) > 0 \Rightarrow f(x) > TG(x) \Rightarrow f \text{ cóncava en } a \\ < \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{convexa} \end{array} \right.$

→ k impar $\Rightarrow$ $(x-a)$ tiene distinto signo a un lado u otro de a $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-a)^k$ también $\Rightarrow f(x) < TG(x)$ en un lado de a y $f(x) > TG(x)$ al otro $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f tiene un p.i. en a.

Ejemplo

Estudiar la convex. de una función en un punto

Regla p.i.

1. $f''(x) = 0 \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n$. Para cada x_i :
2. Hallar k
3. k impar $\rightarrow$ es p.i.

   k par $\rightarrow$ no es p.i.

4. Representación de funciones

* Dominio

* Simetrías

* Continuidad

* Periodicidad

$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es periódica cuando $\exists\, T \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+T) = f(x)$$

T recibe el nombre de período.

El menor de los períodos positivos se llama período principal.

* Puntos de corte con los ejes

* Crecimiento y convexidad

* Asíntotas y sus puntos de corte con la gráfica

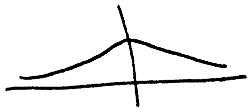
* Cálculo de la tangente en algún punto

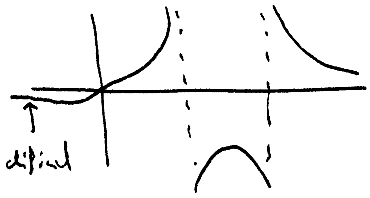
La tangente en a pasa por $(a, f(a))$ y

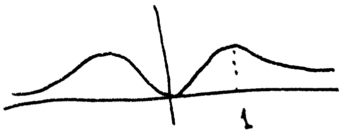
tiene pendiente $f'(a)$

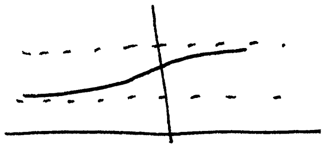
Representación de funciones

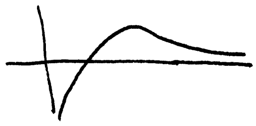
Selectividad

$\dfrac{1}{1+x^2}$ 

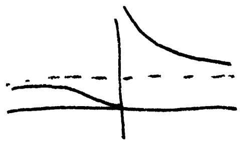
$\dfrac{x}{x^2-5x+4}$ 

$x^2 e^{-x^2}$ 

$\dfrac{1}{1+e^{-x}}+1$ 

$y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{tgh} x$; $y = \dfrac{\ln x}{x}$ 

$y = \dfrac{x^4-3}{x}$ $\quad y = \dfrac{x}{e^x}$ $\quad y = x + \operatorname{sen} x$

$y = e^{\frac{1}{x}}$  $\quad y = \ln (x^2-1)^2$

$y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ $\quad y = \ln \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ $\quad y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$y = \dfrac{e^x}{x^3-2x}$ (no tiene p.i.) $\quad y = \ln (x^2+1)$

$y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Topología

(a,b) es entorno de todos sus puntos y $[a,b]$ no

E acotado $\Rightarrow \forall a \in E \ \exists \varepsilon > 0 \mid E \subset B(a,\varepsilon)$

1. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Demostrar que alcanza mx. absoluto
2. Enunciar el Tma. Bolzano, tma. Rolle y tma. v.m.

1.5p.

3. Desarrollo de Mc Laurin orden 2 de $f(x)=\ln(1+2x)$
4. Hallar los mx y mn. rel. de $y=\dfrac{x^7}{42}-\dfrac{x^5}{5}$

4p. 5. Repr. graf. $y=e^{\frac{x+1}{x-1}}$

Subir nota

1. Repr. graf. $y=\dfrac{e^x}{x^3-2x}$ (Ind.: no tiene p.i.)
2. Demostrar que si $f,g\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ son derivables y $f'=g'$, entonces $\exists\, C\in\mathbb{R}\mid\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=g(x)+C$

① $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - x^2 + 10)$ ② $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 2x^4 + 15x - 1)$ ③ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ ④ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^7 + 2x^2}{x^6 - x^2}$

④ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x - 1}{3x^3 - 12}$ ⑤ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 5x^3}{2x^2 + 1}$ ⑥ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$ ⑦ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ ⑧ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

⑨ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{x}$ ⑩ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\ln x}$ ⑪ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$ ⑫ $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$ ⑬ $\lim\limits_{x \to 0} x (\ln x)^2$

⑭ $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x \cdot e^x$ ⑮ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$ ⑯ $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ ⑰ $\lim\limits_{x \to 0} x^{\ln x}$ ⑱ $\lim\limits_{x \to 1} (\ln x)^x$

⑲ Calcular los máximos, mínimos rel. y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$f(x) = x^3 - 6x$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2$, $h(x) = e^{x^2}$, $p(x) = e^{x^2 - 2x}$, $q(x) = \frac{1}{x}$

$s(x) = x \ln x$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (coseno hiperbólico).

⑳ Decir los intervalos de crecimiento, decr., concavidad y convexidad de f, g, q

㉑ Representar gráficamente las funciones f, g, h, s del (19). Indicación: usar el (12)

㉒ Representar gráficamente las funciones $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Cálculo integral

1. Métodos de integración

Diferenciales

Sabemos que $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ y $dy = f'(x)\,dx = d(f(x))$

Con las diferenciales se opera igual que con las derivadas, e.d.:

$d(u+v) = du + dv$

$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$

$d(\operatorname{sen} x) = \cos x\,dx$

etc.

Dem: $d(u+v) = (u+v)'\,dx = u'dx + v'dx = du + dv$

$$\int d(f(x)) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

Integración por transformación

Si $\int f(x)\,dx$ no es inmediata, se puede intentar cambiar la expresión de $f(x)$ para conseguirlo

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx$$

Integración por partes

$d(uv) = du \cdot v + u\,dv \Rightarrow \dots \Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$

Ejemplos y ejercicios

a) Sencillos

b) Para utilizar la fórmula varias veces

c) Integrales "reproductivas": aparece la ~~función~~ integral otra vez al aplicar la f. 2 veces.

d) Cuando es necesario hacer $u = 1$

Integración de funciones racionales (planteamiento)

Una función racional es una función que es cociente de dos polinomios.

Si P y Q son dos polinomios, hay que calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Si la integral no es inmediata, la haremos por transformación

Raíces complejas de un polinomio

Sea $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ un polinomio. $(a_i \in \mathbb{R})$

Se dice que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de Q cuando $Q(z) = 0$

Ejemplos $Q \to a, \alpha+\beta i, \alpha-\beta i$; $Q \to a, b, a$

Se llama multiplicidad de una raíz al número de veces que se repite.

Nosotros buscamos todas las raíces $z \in \mathbb{C}$ que tenga Q

Ejemplo

Se puede demostrar que

1. $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ tiene n raíces complejas

2. Si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de Q también lo es $\bar{z}$

3. $Q(x) = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n)$, donde x_i son las raíces de Q

Nombres de las raíces:

Si $z \in \mathbb{R}$ es raíz de Q y tiene mult. 1, se llama raíz real simple

" " " " >1, " real múltiple

Si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ " " 1, " compleja simple

" " " " >1, " compleja múltiple.

Supongamos que Q tiene

p raíces reales simples $s_1, \dots, s_p$

q " " múltiples $t_1, \dots, t_q$ con multiplicidades $m_1, \dots, m_q$ y

r parejas de raíces complejas simples $(\alpha_1 + \beta_1 i), (\alpha_1 - \beta_1 i), \dots, (\alpha_r - \beta_r i)$

(Evidentemente $p + m_1 + \dots + m_q + 2r = n$)

Entonces podemos escribir

$$Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n) =$$

$$= a_n (x - s_1) \dots (x - s_p)(x - t_1)^{m_1} \dots (x - t_q)^{m_q} (x - (\alpha_1 + \beta_1 i))(x - (\alpha_1 - \beta_1 i)) \cdot$$

$$\dots (x - (\alpha_r + \beta_r i))(x - (\alpha_r + \beta_r i))$$

Los productos $(x - (\alpha + \beta i))(x - (\alpha - \beta i))$ se pueden escribir como

$(x - \alpha)^2 + \beta^2$ ó $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ según interese

Integración de funciones racionales (resolución)

Sea $Q(x)$ un polinomio **sin** raíces complejas múltiples y $P(x)$ un polinomio cualquiera

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{a_n(x-s_1)\cdots(x-(\alpha_r - \beta_r i))}\,dx =$$

$$= \int C(x)\,dx + \frac{1}{a_n}\left[\int \left(\frac{A_1}{x-s_1} + \cdots + \frac{A_p}{x-s_p} + \frac{B_{1,1}}{x-t_1} + \cdots + \frac{B_{1,m_1}}{(x-t_1)^{m_1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cdots + \frac{B_{q,1}}{x-t_q} + \cdots + \frac{B_{q,m_q}}{(x-t_q)^{m_q}} + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 - 2\alpha_1 x + \alpha_1^2 + \beta_1^2} + \cdots + \frac{C_r x + D_r}{x^2 - 2\alpha_r x + \alpha_r^2 + \beta_r^2} \right) d\right.$$

donde los coeficientes A, B, C, D han de ser calculados.

Todas las integrales que quedan son inmediatas:

$$\int \frac{1}{x-s}\,dx = \cdots$$

$$\int \frac{1}{(x-t)^6}\,dx = \cdots$$

$$\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}\,dx = \cdots \quad (\ln + \operatorname{arctg})$$

Ejemplos y ejercicios

Calcular los coef.

a) Sólo simples

b) Sólo reales

c) Todo junto (poniendo polinomios como $x^4 - 1$)

d) Dividiendo

Integración por cambio de variable

Planteamiento

Se quiere calcular $\int f(x)\,dx$ y se sabe que $x = \varphi(t)$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(t) + C = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C$$

Ejemplos

Integración de funciones trigonométricas

Cualquier f. t. se puede expresar únicamente con sen x y cos x, que aparecerán elevadas a potencias.

a) Impar en seno: $\cos x = t$

b) Impar en coseno: $\operatorname{sen} x = t$

c) Par en seno y coseno: $\operatorname{tg} x = t$

$$\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}; \quad dx = \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

d) Último recurso: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

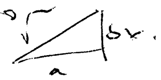
$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

CI 6

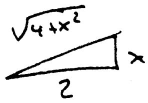
Cambios trigonométricos

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx \qquad x = \frac{a}{b}\operatorname{sen} t \;\to\; a\cos t$$

$$\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}\, dx \qquad x = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t \;\to\; a\sec t$$



$$\int \sqrt{b^2x^2 - a^2}\, dx \qquad x = \frac{a}{b}\sec t \;\to\; a\operatorname{tg} t$$

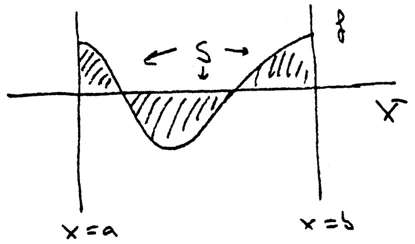
[Para deshacer el cambio  y similares]

$$\int \sqrt{4+x^2}\, dx$$

2. Aplicaciones del cálculo integral

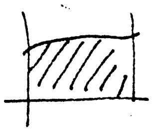
Área determinada por la gráfica de una función, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

Se trata de calcular



, de modo que suponemos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua. [Intentar calcularlo de un tirón]

a) $f>0$



$f(x)>0\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h > 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \int_a^b f > 0$

$S=\int_a^b f$ (intuitivamente, por la definición de integr. definida)

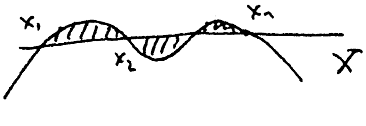
b) $f<0$ (...) $S=-\int_a^b f$

c) Caso general

$f(x)=0 \Rightarrow x=x_1,\dots,x_n\in[a,b]$

$$S=\left|\int_a^{x_1} f\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right|+\dots+\left|\int_{x_n}^{b} f\right|$$

d) Caso particular: área det. por la gráfica de una función g y el eje de abscisas

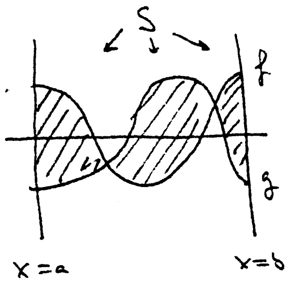


$f(x)=0 \Rightarrow x=x_1,\dots,x_n$

$$S=\sum_{i=1}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\right|$$

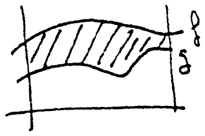
Area determinada por las gráficas de dos funciones y dos rectas verticales

Se trata de calcular



, de modo que supondremos que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas

a) $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq g(x) \geq 0$



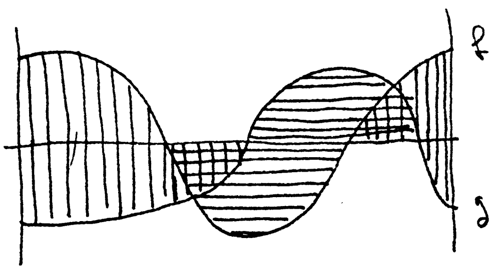
$$S = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$$

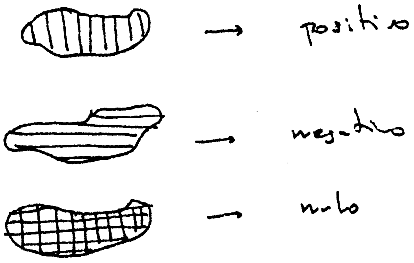
Si es necesario, se puede dem. con la regla de B. o con la def.

b) Caso general.

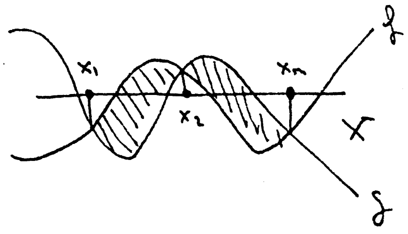
$$f(x) = g(x) \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n \in [a,b]$$

$$S = \left| \int_a^{x_1} (f-g) \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f-g) \right| + \dots + \left| \int_{x_m}^{b} (f-g) \right| .$$ Justificación





c) Caso particular: área det. por dos funciones

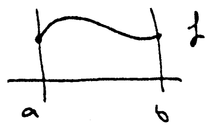


$$f(x) = g(x) \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n$$

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f-g) \right|$$

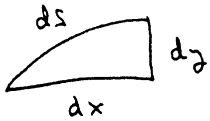
Longitud de una curva

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable.



Se desea calcular la longitud de la curva desde $(a, f(a))$ hasta $(b, f(b))$

Esto recibe el nombre de "rectificación" [Poner recto]

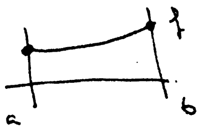


Elemento de arco : $ds \Rightarrow (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

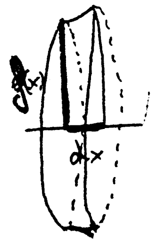
$$\text{Long}_a^b = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \dots = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Volumen de un cuerpo de revolución

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua



Giramos $Gr(f)$ con eje OX y se genera un volumen

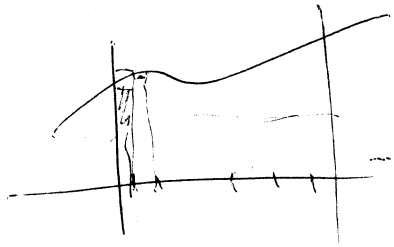


Elemento de volumen : $dV = \pi (f(x))^2 dx$

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b \pi (f(x))^2\, dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

CI 10

3. Integral de Riemann



Sumas de Riemann

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada

$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición o subdivisión de $[a,b]$ cuando

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\text{Part}([a,b]) = \{\Delta \mid \Delta \text{ es partición de } [a,b]\}$

$d(\Delta) = \text{diámetro}(\Delta) = \text{máx}\{x_i - x_{i-1}\}_{i=1,\dots,n}$

f acotada $\Rightarrow$ f acotada en $[x_{i-1}, x_i]$ $(\forall i = 1,\dots,n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, m_i, M_i$ ínfimo y supremo de f en $[x_{i-1}, x_i]$

Suma inferior de Riemann asociada a la partición Δ es

$$s(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i$$

Superior :

$$S(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, M_i$$

Propiedades

$\forall \Delta \in \text{Part}([a,b])$

1. $s(f,\Delta) \le S(f,\Delta)$

2. $\Delta' = \Delta \cup \{\alpha\} \Rightarrow s(f,\Delta) \le s(f,\Delta') \wedge S(f,\Delta') \le S(f,\Delta)$

Demostración $\qquad \alpha \in [x_{i-1}, x_i]$

$$m'_i = \inf(f[x_{i-1}, \alpha]) \Rightarrow m_i \leq m'_i$$

$$m''_i = \inf(f[\alpha, x_i]) \Rightarrow m_i \leq m''_i$$

$$(x_i - x_{i-1})\, m_i = (x - \alpha)\, m_i + (\alpha - x_{i-1})\, m_i \leq (x - \alpha)\, m'_i + (\alpha - x_{i-1})\, m''_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(f, \Delta) \leq s(f, \Delta')$$

3. $\Delta' = \Delta \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \Rightarrow s(f,\Delta) \leq s(f,\Delta') \wedge S(f,\Delta') \leq S(f,\Delta)$

4. $\forall\, \Delta, \Delta' \in \mathrm{Part}([a,b]) : s(f,\Delta) \leq S(f,\Delta')$

   [Demostración $\quad \Delta \cup \Delta'$]

5. $m = \inf(f[a,b]) \Rightarrow (b-a)\, m \leq s(f,\Delta)$

   $M = \sup(f[a,b]) \Rightarrow S(f,\Delta) \leq (b-a)\, M$

<u>Consecuencias</u>

1. $(b-a)\, m \leq s(f,\Delta) \leq S(f,\Delta') \leq (b-a)\, M$, luego
2. $s = \{ s(f,\Delta) \mid \Delta \in \mathrm{Part}([a,b]) \}$ y $S = \{ S(f,\Delta) \mid \Delta \in \mathrm{Part}([a,b]) \}$

   son acotados.
3. $\exists\ \sup(s),\ \inf(S)$
4. $\sup(s) \leq \inf(S)$

Definición

Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada se dice que es integrable (Riemann) en $[a,b]$ cuando $\sup(s) = \inf(S)$

Si f es integrable, se escribe

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \sup(s) = \inf(S)$$

Ejemplo

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

Propiedades

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables, $c \in (a,b)$, $k \in \mathbb{R}$

1. kf integrable y $\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$
2. $f+g$ integrable y $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

$\int_a^b$ lineal.

3. f integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
4. $\int_a^b f = -\int_b^a f$
5. $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
6. $|f|$ integrable y $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Teorema

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada cumpliendo alguna de las siguientes condiciones:

1. Continua
2. Continua salvo en una cantidad finita de puntos
3. Creciente
4. Decreciente

Entonces f es integrable

Contraejemplo

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

(Función de Direchlet) no es integrable Riemann.

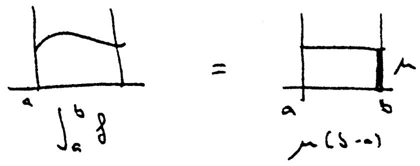
4. Teoremas del cálculo integral

Teorema del valor medio del cálculo integral

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, $m = \inf(f[a,b])$, $M = \sup$

1. $\exists \mu \in [m, M] \mid \int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$

   μ se llama valor medio de f en $[a,b]$



2. $f \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] \mid \int_a^b f = f(\alpha)(b-a)$

Demostración

1. $\forall x \in [a,b] : \; m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M \, ;$$

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b \Rightarrow \mu \in [m, M] \wedge \mu(b-a) = \int_a^b f$$

2. $\mu \in [m, M] \wedge f$ continua $\Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] \mid \mu = f(\alpha)$

La función área

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable $\Rightarrow \forall x \in [a,b] : f$ ac. e int. en $[a,x] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \int_a^x f(t)\,dt$. Se puede considerar la función

$$A : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt \, , \text{ función área}$$

Proposición

La función área es continua

Demostración

$$\lim_{x \to x_0} (A(x) - A(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \overset{\text{T.v.m.c.i.}}{=} \lim_{x \to x_0} (\mu\,(x - x_0)) = 0$$

Teorema fundamental del cálculo integral

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua ($\therefore$ ac. e integr.) , la función área $A : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \to \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable en (a,b) y $A' = f$

Demostración

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \underset{\substack{\alpha \text{ entre } x \\ y\ x+h}}{\overset{\text{T.v.m.c.i.}}{=}} \lim_{h \to 0} \frac{h\,f(\alpha)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\alpha) =$$

$$= f\left(\lim_{h \to 0} \alpha \right) = f(x)$$

Regla de Barrow

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. ($\therefore$ ac. e integr.) y F una primitiva suya. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Demostración

$$\left.\begin{array}{l} \text{T. fund. c. i.} \Rightarrow A'(x) = f(x) \\ F \text{ prim. de } f \Rightarrow F'(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow A'(x) - F'(x) = (A-F)'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - F \text{ cte} \Rightarrow \exists\, C \in \mathbb{R} \mid A(x) = F(x) + C \quad \forall x \in [a,b]$$

$x = a \Rightarrow A(a) = F(a) + C \Rightarrow \dots \Rightarrow C = -F(a)$

$x = b \Rightarrow A(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$, c.d.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Cálculo de primitivas

$$\int \frac{dx}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^{-x}}\,dx = \dots$$

div. por e^x num. y den.

$\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx \qquad 1-x^3=t^2$

$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx \qquad x-1=t^2$

$\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx \qquad x=\frac{1}{t}$

$\int \sqrt{1-\sqrt{x}}\,dx \qquad 1-\sqrt{x}=t^2$

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \qquad x=\frac{2}{t}$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} \qquad x=\frac{1}{t}$

$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$\int \frac{(e^x-2)\,e^x}{e^x+1}\,dx \qquad t=e^x+1$

$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx \qquad t^2=1+x^2$

$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$

$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x+\cos x+1}\,dx \qquad (\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t)$

Longitudes de curvas

$y = \ln x$ entre $x = 1$ y $x = \dots$

$y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ " $x = 1$ " $x = 2$ $\left[\ln \frac{e^2+1}{e} \right.$, largo $\left. \right]$

$y = e^x$ " $x = 0$ " $x = 1$

$y = \ln \sec x$ " $x = 0$ " $x = \frac{\pi}{3}$ [precioso]

1. $\int (x^3 + 5x^2)\,dx$
2. $\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{x^5})\,dx$
3. $\int (5x+3)^4\,dx$
4. $\int \frac{1}{(7x-4)^3}\,dx$
5. $\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen} x\,dx$
6. $\int \sec^2 x\, tg^2 x\,dx$
7. $\int e^x\,dx$
8. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$
9. $\int \cos x\, a^{\operatorname{sen} x}\,dx$
10. $\int \frac{1}{x}\,dx$
11. $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$
12. $\int \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}\,dx$
13. $\int tg\, x\,dx$
14. $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$
15. $\int \frac{x^5 + 4x^3}{6x^4 + x^6}\,dx$
16. $\int \operatorname{sen}(27x^3) \cdot x^2\,dx$
17. $\int \sec^2 5x \cdot dx$
18. $\int (\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)) \cos x\,dx$
19. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$
20. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
21. $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$
22. $\int \frac{x}{1+16x^4}\,dx$
23. $\int \frac{1}{3+x^2}\,dx$
24. $\int \frac{4}{5+2x^2}$
25. $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$
26. $\int x \ln x\,dx$
27. $\int x e^x\,dx$
28. $\int x^2 e^x\,dx$
29. $\int \ln x\,dx$
30. $\int x^2 \ln x\,dx$
31. $\int x \operatorname{sen} x\,dx$
32. $\int x^3 \cos x\,dx$
33. $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$
34. $\int e^{2x} \cos x\,dx$
35. $\int e^{5x} \operatorname{sen} 7x\,dx$
36. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$
37. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+3}$
38. $\int \frac{1}{x^2-4x+3}$
39. $\int \frac{1}{x^3+x^2-2x}\,dx$
40. $\int \frac{1}{x^3+x^2}$
41. $\int \frac{1}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx$
42. $\int \frac{1+2x}{x^2+2x+5}\,dx$
43. $\int \frac{2x^2+11}{(x^2-4x+8)(x+3)}\,dx$
44. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx$
45. $\int \frac{Ax+B}{C+Dx^2}\,dx$

Fecha: V.5.5.1989 Tiempo: 1h

① Definir la función área y demostrar que es continua.

② $\int \frac{x^3 + x^2}{x^3 - x^2}\, dx$

③ $\int \frac{x+1}{x^2+6x+11}\, dx$

④ $\int tg\, x \, sen^2 x\, dx$

⑤ Area det. por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$

2 p.a.u

Subir nota

① $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}\, dx$

② $\int_0^1 x \ln x\, dx$

③ Dem. integrando por partes que

$$\int \frac{sen^n x}{cos^m x}\, dx = \frac{1}{m-1} \frac{sen^{n-1} x}{cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{sen^{n-2} x}{cos^{m-2} x}\, dx$$

(23) $\int 3\,dx$ (24) $\int (x^3+2x^2-1)\,dx$ (24) $\int (\sqrt[7]{x^5}+\sqrt{x})\,dx$ (25) $\int\left(\frac{3}{x}+\operatorname{sen}x-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

(26) $\int x^2 \operatorname{sen} x^3\,dx$ (27) $\int (x+1)\,e^{x^2+2x}\,dx$ (28) $\int \frac{3x^5+5x^4}{x^6+2x^5}\,dx$ (29) $\int \frac{7}{x-4}\,dx$

(30) $\int \operatorname{tg} x\,dx$ (31) $\int \frac{1+x}{x^2+2x}\,dx$ (32) $\int (\operatorname{sen}\cos x)\operatorname{sen}x\,dx$ (33) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

(34) $\int x e^x\,dx$ (35) $\int x \ln x\,dx$ (36) $\int x^3 e^x\,dx$ (37) $\int x \operatorname{sen}2x\,dx$ (38) $\int \operatorname{arctg} x$

(39) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\,dx$ (40) $\int_1^e \ln x\,dx$ (41) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$ (42) $\int \frac{dx}{x^2-x}$

(43) $\int \frac{dx}{x^3-3x^2}$ (44) $\int \frac{1}{2+x^2}\,dx$ (45) $\int \frac{3}{5+2x^2}\,dx$ (46) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$

(47) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+3}\,dx$ (48) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+10}\,dx$ (49) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\,dx$

(50) Descomponer en fracciones simples, sin calcular los coeficientes, las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{1}{(x^2-1)(x^2-4x+3)(x^2+1)} \qquad g(x)=\frac{1}{(x-2)(2x-3)(x+1)}$$

(cuidado con el coef. de x^3)

$$h(x)=\frac{1}{x^3(x-1)^2(x^2-1)} \qquad p(x)=\frac{1}{(x^2-2x+3)(x+3)(x^3+3x^2+3x+1)}$$

Cálculo de probabilidades

0. Repaso

0.1 Conjuntos

Definiciones
Partes de un conjunto
Operaciones con conjuntos

0.2 Combinatoria

Variaciones
Permutaciones
Combinaciones

1. Espacios probabilísticos

1.1 Conceptos básicos

Experimento aleatorio
Espacio muestral
Suceso elemental
Suceso

1.2 Operaciones con sucesos

Unión
Intersección
Contrario
Suceso imposible
Suceso seguro
Diferencia
Sucesos incompatibles

1.3 Frecuencias

Definición
Propiedades

1.4 Definición de espacio probabilístico

Idea intuitiva
Definición
Propiedades
Ley de Laplace

2. Probabilidad condicionada

2.1 Sucesos condicionados

Definición

2.2 Sucesos dependientes e independientes

Definición
Consecuencias

2.3 Teorema de la probabilidad total

2.4 Teorema de Bayes

CALCULO DE PROBABILIDADES

0. REPASO

0.1 Conjuntos

Definición

Conjunto es la consideración en un todo de distintos entes.

Los entes pueden, en principio, tener cualquier naturaleza.

Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas, de cualquier alfabeto: $H, \mathcal{H}, \Omega$

Los entes que constituyen un conjunto se llaman elementos de ese conjunto. Se nombran con letras minúsculas: $h, \alpha, z, \theta \dots$

Si "a" pertenece a "A" se escribe $a \in A$

Si "a" no pertenece a "A" se escribe $a \notin A$.

Un conjunto se puede definir por

- Extensión, nombrando todos sus elementos y por
- Comprensión, diciendo una característica que sólo sea cumplida por sus elementos.

Cardinal de un conjunto es el número de elementos que tiene. Se escribe así: card (A) o así: #(A). Ejemplo: $\text{card}(\emptyset) = 0$

Partes de un conjunto

Dados dos conjuntos A y M se dice que A es una parte de M, o que A es un subconjunto de M o que M es un superconjunto de A cuando todos los elementos de A pertecen a M. Se escribe $A \subset M$ (Se lee: A contenido en M)

$$\boxed{A \subset M \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in M}$$

El conjunto de todas las partes de M se designa $\mathcal{P}(M)$

Por tanto $\mathcal{P}(M)$ está formado por todos los subconjuntos de M

$$\boxed{\mathcal{P}(M) = \{ A \mid A \subset M \}} \qquad \boxed{A \in \mathcal{P}(M) \Leftrightarrow A \subset M}$$

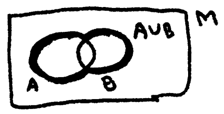
Se sabe que $\operatorname{card}(M) = n \Rightarrow \operatorname{card}(\mathcal{P}(M)) = 2^n$

Operaciones en $\mathcal{P}(M)$

Sean $A, B \in \mathcal{P}(M)$; $\quad A = B \Leftrightarrow [\, A \subset B \wedge B \subset A \,]$

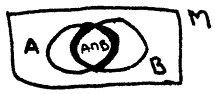
Unión de A y B es el conjunto de elementos que están en A o en B

$$\boxed{A \cup B = \{ x \in M \mid x \in A \vee x \in B \}}$$



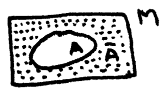
Intersección de A y B es el conjunto de elementos que están en A y en B

$$\boxed{A \cap B = \{ x \in M \mid x \in A \wedge x \in B \}}$$



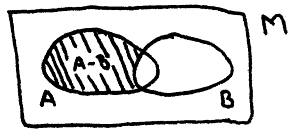
Complementario de A en M es el conjunto de elementos que no están en A

$$\boxed{\overline{A} = \{ x \in M \mid x \notin A \}}$$



Diferencia de A y B es el conjunto de elementos que están en A pero no en B

$$\boxed{A - B = A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}}$$



$(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, {}^{-})$ se dice que es el "álgebra de Boole" de las partes de M por las propiedades que cumple. M se llama conjunto universal.

0.2 Combinatoria

Variaciones

Si de m elementos tenemos que elegir n sin repetir ninguno, importando tanto los elementos que se elijen como el orden en que se toman, hay que considerar "variaciones sin repetición de m elementos tomados n a n". Obviamente, debe ser $m \geq n$

$$\boxed{V_{m,n} = V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}$$

Ejemplo: $V_{8,3} = V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Si de m elementos hay que elejir n, pudiendo repetir cualquiera, importando tanto el orden como los elementos, se está ante "variaciones con repetición de m elementos tomados n a n". Ahora puede ser $m < n$.

$$\boxed{VR_{m,n} = VR_m^n = m^n}$$

Ejemplo: $VR_{8,3} = VR_8^3 = 8^3 = 512$

Permutaciones

El número de formas en que se pueden colocar n elementos distintos es "permutaciones de n elementos", siempre que la colocación sea en fila.

$$\boxed{P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

Ejemplo: $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

El número de formas en que pueden ser colocados en fila n elementos de los que n_1 son iguales entre sí, n_2 son iguales entre sí, ..., y n_k son iguales entre sí es "permutaciones de n elementos estando repetidos $n_1, n_2, \ldots, n_k$". Es claro que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k \leq n$

$$\boxed{P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \ldots n_k!}}$$

Ejemplos: $P_8^3 = \dfrac{8!}{3!} = 6720$; $P_8^{3,3,2} = \dfrac{8!}{3!\,3!\,2!} = 560$

Combinaciones

Si de m elementos distintos hay que elegir n sin poder repetir y sin que importe el orden, hay que considerar "combinaciones sin repetición de m elementos tomados n a n".

$$\boxed{C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}}$$

Ejemplo: $C_{8,3} = C_8^3 = \dfrac{V_8^3}{P_3} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} = \dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{5!\,3!} = 56$

Si de m elementos distintos hay que elegir n sin que importe el orden y pudiendo repetir los elementos elegidos, se consideran "combinaciones con repetición de m elementos tomados n a n".

$$\boxed{CR_{m,n} = CR_m^n = C_{m+n-1,n}}$$

Ejemplo: $CR_{8,3} = CR_8^3 = C_{10,3} = 120$

1. ESPACIOS PROBABILISTICOS

1.1. Conceptos básicos

* Experimento aleatorio (o experimento estocástico, o prueba) es un procedimiento o método para seleccionar un elemento de un conjunto M, de modo que a priori no sea posible saber cuál va a ser el seleccionado.

* Espacio muestral del experimento aleatorio: el conjunto M
* Suceso elemental: cualquier elemento de M
* Suceso: cualquier subconjunto de M

Se dice que "se ha verificado el suceso A" cuando al realizar la prueba se ha obtenido un elemento de **A**.

1.2. Operaciones con sucesos

Sea E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y $A, B \in P(M)$ dos sucesos cualesquiera.

El suceso unión de A y B viene definido por el conjunto $A \cup B$ y es aquel que se verifica cuando el resultado de la prueba es un elemento de A o de B

El suceso intersección de A y B viene definido por el conjunto $A \cap B$ y se verifica sólo cuando el resultado de la prueba es un elemento que pertenece a A y a B.

El suceso contrario de A es el que se verifica cuando no se verifica A. Está definido por el conjunto $\overline{A}$

Suceso imposible: el que nunca se verifica. Su conjunto asociado es el $\emptyset$

Suceso seguro: el que se verifica siempre. Su conjunto es M

Las propiedades que cumple $(P(M), \cap, \cup, ^{-})$ nos hacen decir que es el "Algebra de Boole" de los sucesos asociados al experimento aleatorio E. Estas propiedades son idénticas a las que cumplen los conjuntos.

El suceso diferencia de A y B es el que se verifica cuando el resultado de E es un elemento de A que no está en B. El conjunto que lo representa es $A - B$

Dos sucesos son incompatibles cuando no se pueden verificar simultáneamente, es decir: $A \cap B = \emptyset$

1.3 Frecuencias

Definición

Sean E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y $A \in P(M)$ un suceso.

Supongamos que efectuamos n veces el experimento E y en m ocasiones se verifica el suceso A.

* Frecuencia absoluta de A: el número m. Se escribe $F(A) = m$
* Frecuencia relativa de A: el número $\frac{m}{n}$. Se escribe $f(A) = \frac{m}{n}$

Obsérvese que $f(A) = \frac{F(A)}{n}$

Propiedades

Sean $A, B \in P(M)$

1a. $0 \leq F(A) \leq n$

2a. $F(\bar{A}) = n - F(A)$

3a. $A \subset B \Rightarrow F(A) \leq F(B)$

4a. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow F(A \cup B) = F(A) + F(B)$

5a. $F(M) = n$

6a. $F(A \cup B) = F(A) + F(B) - F(A \cap B)$

Estas propiedades de las frecuencias absolutas son evidentes. Dividiendo cada igualdad por n se obtienen las propiedades correspondientes de las frecuencias relativas:

1. $0 \leq f(A) \leq 1$
2. $f(\bar{A}) = 1 - f(A)$
3. $A \subset B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$
4. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A \cup B) = f(A) + f(B)$
5. $f(M) = 1$
6. $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$

1.4 Definición de espacio probabilístico

Idea intuitiva

Si E es un experimento aleatorio con espacio muestral M, se desea asociar a cada suceso un número, que llameremos probabilidad de ese suceso ($p(A)$) y que coincida con el valor que parece tomar $f(A)$ cuando n es muy alto, es decir, que deseamos que se verifique

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} f(A) \qquad \text{[Ley de los grandes números]}$$

Además se quiere que las probabilidades tengan las propiedades que ya tenían las frecuencias relativas.

Si se consigue definir esa "probabilidad" p, el par (M, p) se llamará "espacio probabilístico".

Definición

Sean M un conjunto y $p : \mathcal{P}(M) \longrightarrow [0,1]$ una aplicación.

1. Se dice que p es una probabilidad cuando

   a) $p(M) = 1$

   b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(M) \mid A \cap B = \emptyset : \; p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

2. Se dice que el par (M, p) es un espacio probabilístico cuando p es una probabilidad

Propiedades

Sea (M, p) un espacio probabilístico.

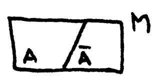
1 $\boxed{p(\emptyset) = 0}$

$$M \cap \emptyset = \emptyset \overset{(b)}{\Rightarrow} p(M \cup \emptyset) = p(M) + p(\emptyset) \Rightarrow p(M) = p(M) + p(\emptyset) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\emptyset) = 0$$

2 $\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(M) : \; p(\bar{A}) = 1 - p(A)}$

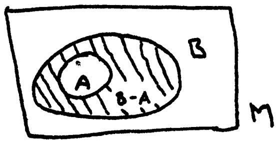
Sabemos que $A \cup \bar{A} = M$ y $A \cap \bar{A} = \emptyset$



$$A \cap \bar{A} = \emptyset \overset{(b)}{\Rightarrow} p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) \Rightarrow p(M) = p(A) + p(\bar{A}) \overset{(a)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(a)}{\Rightarrow} 1 = p(A) + p(\bar{A}) \Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

3 $\boxed{\forall A, B \in \mathcal{P}(M) \mid A \subset B : \; p(A) \leq p(B)}$

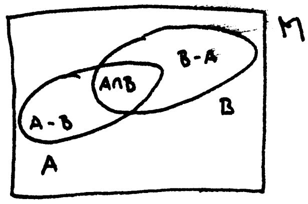


Partimos de que $B = (B-A) \cup A$ y $(B-A) \cap A = \emptyset$

$$(B-A) \cap A = \emptyset \overset{(b)}{\Rightarrow} p((B-A) \cup A) = p(B-A) + p(A) \Rightarrow p(B) = p(B-A) + p(A)$$

Por ser $p(B-A) \in [0,1]$, queda $p(A) \leq p(B)$

4 $\boxed{\forall A, B \in \mathcal{P}(M) : \; p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$



Sabemos que $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$

y $(A-B) \cap (A \cap B) \cap (B-A) = \emptyset$

$$p(A) = p(A-B) + p(A \cap B) \Rightarrow p(A-B) = p(A) - p(A \cap B)$$

$$p(B) = p(B-A) + p(A \cap B) \Rightarrow p(B-A) = p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = p(A-B) + p(A \cap B) + p(B-A) = p(A) - p(A \cap B) + p(A \cap B) +$$

$$+ p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Ley de Laplace

Sea (M, p) un espacio probabilístico finito (e.d.: M es un conjunto finito) y equiprobable (e.d.: la probabilidad de todos los sucesos elementales o elementos de M es la misma). Entonces

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(M) : \; p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(M)}}$$

A nivel elemental esto se enuncia así: $p(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.

Demostración

Como es M finito, numeramos sus elementos: $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$

Es claro que $M = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_s\}$ y $\{a_1\} \cap \{a_2\} = \emptyset$, $\{a_1\} \cap \{a_3\} = \emptyset$, $\{a_1\} \cap \{a_s\} = \emptyset, \ldots, \{a_{s-1}\} \cap \{a_s\} = \emptyset$ (se dice que los conjuntos $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_s\}$ son disjuntos dos a dos.)

Por tanto $p(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_s\}) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + \ldots + p(\{a_s\})$

Como es espacio es equiprobable, $p(\{a_1\}) = p(\{a_2\}) = \ldots = p(\{a_s\})$

Luego $p(M) = p(\{a_i\}) + p(\{a_i\}) + \overset{(s}{\ldots\ldots} + p(\{a_i\}) \quad (\forall i = 1, 2, \ldots, s) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = s \cdot p(\{a_i\}) \; (\forall i = 1, 2, \ldots, s) \Rightarrow \quad p(\{a_i\}) = \frac{1}{s} \quad \forall i = 1, \ldots, s$

Como $A \in P(M)$, será $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}$

$A = \{a_{i_1}\} \cup \{a_{i_2}\} \cup \ldots \cup \{a_{i_r}\} \Rightarrow p(A) = p(\{a_{i_1}\}) + p(\{a_{i_2}\}) + \ldots + p(\{a_{i_r}\}) =$

$\Rightarrow p(A) = r \cdot p(\{a_i\}) = r \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow p(A) = \frac{r}{s} \Rightarrow p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(M)}$

2. PROBABILIDAD CONDICIONADA

2.1 Sucesos condicionados

Sea E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y A y B dos sucesos. Llamamos n al número de veces que se realiza la prueba E

Se llama suceso "A condicionado a B" (se escribe A/B) al suceso que sólo se verifica cuando, habiéndose verificado B, también se verifica A.

Frecuencia absoluta de A/B es el número $F(A/B)$, número de veces que se verifique el suceso A/B.

Frecuencia relativa de A condicionado a que B se ha verificado es el número $f_B(A) = f(A/B)$ definido como $f(A/B) = \frac{F(A/B)}{F(B)}$

Pero el número de veces que se verifica A cuando ya se ha verificado B, es decir, $F(A/B)$, es precisamente el número de veces que se verifica $A \cap B$, o sea, $F(A \cap B)$, con lo que

$$f(A/B) = \frac{F(A \cap B)}{F(B)} \quad ; \quad \text{dividiendo por } n: \quad f(A/B) = \frac{\frac{F(A \cap B)}{n}}{\frac{F(B)}{n}} = \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$$

Definición

Sea (M, p) un espacio probabilístico y $B \in P(M)$ un suceso tal que $p(B) \neq 0$

"Probabilidad condicionada a B" es la aplicación $p_B : P(M) \to [0,1]$
$A \to p_B(A)$

definida por $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$; pero $p_B(A) = p(A/B)$, con

lo que $\boxed{p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}}$

2.2. Sucesos dependientes e independientes

En general la probabilidad de que se verifique el suceso A $(p(A))$ no es la misma que la probabilidad de que se verifique sabiendo de antemano que el suceso B se ha verificado $(p(A/B))$, es decir, en general $p(A) \neq p(A/B)$.

Pero cuando el hecho de saber que B se ha verificado no aporta ninguna información sobre si A se verifica o no, entonces $p(A) = p(A/B)$, y esto sucede muy a menudo.

Definición

Sea E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y $A, B \in P(M)$ dos sucesos.

1. Se dice que A y B son dependientes cuando $p(A) \neq p(A/B)$
2. Se dice que A y B son independientes cuando $p(A) = p(A/B)$

Consecuencias

1 $\boxed{A \text{ y } B \text{ dependientes} \Rightarrow p(A\cap B) = p(B)\cdot p(A/B) = p(A)\cdot p(B/A)}$

2 $\boxed{A \text{ y } B \text{ independientes} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)\cdot p(B)}$

Demostración

1. Esta propiedad se verifica siempre, pero sólo se usa cuando los sucesos son dependientes

$$p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A\cap B) = p(B)\cdot p(A/B)$$

$$p(B/A) = \frac{p(B\cap A)}{p(A)} \Rightarrow p(B\cap A) = p(A)\cdot p(B/A)$$

c.q.d.

2. Por la parte (1), $p(A\cap B) = p(B)\cdot p(A/B)$

Por ser A y B independientes, $p(A/B) = p(A)$

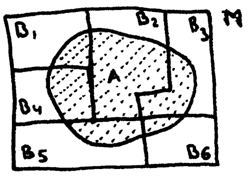
Luego $P(A\cap B) = p(B)\cdot P(A)$, $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$, c.q.d.

2.3 Teorema de la probabilidad total

Sea E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y $A, B_1, B_2, \ldots, B_K \in P(M)$ sucesos que verifiquen que $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_K = M$ y los conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_K$ son disjuntos dos a dos. Entonces

$$\boxed{p(A) = \sum_{i=1}^{K} p(B_i)\cdot p(A/B_i)}$$

Demostración



$$p(A) = p\left((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots\cup(A\cap B_K)\right) =$$

$$= p(A\cap B_1) + p(A\cap B_2) + \ldots + p(A\cap B_K) =$$

$$= \sum_{i=1}^{K} p(A\cap B_i) = \sum_{i=1}^{K} p(B_i)\cdot p(A/B_i)\text{, c.q.d.}$$

2.4 Teorema de Bayes

Sea E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y $A, B_1, B_2, \ldots, B_K \in P(M)$ sucesos que verifiquen que $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_K = M$ y los conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_K$ son disjuntos dos a dos. Entonces $\forall j = 1, \ldots, K$: $\boxed{p(B_j/A) = \dfrac{p(B_j)\cdot p(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{K} p(B_i)\cdot p(A/B_i)}}$

Demostración

$$p(B_j/A) = \frac{p(B_j\cap A)}{p(A)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tma. prob. total}}}{=} \frac{p(B_j)\cdot p(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{K} p(B_i)\cdot p(A/B_i)}\text{, c.q.d.}$$

2.5 Pruebas con reemplazamiento

Sean E un experimento aleatorio, M su espacio muestral, (M, p) un espacio probabilístico y $A \in \mathcal{P}(M)$ un suceso cualquiera.

Consideramos el experimento aleatorio E_n consistente en repetir E n veces. Su espacio muestral es $M \times M \times \overset{(n}{\ldots} \times M$ y en él hay definida también una probabilidad que llamamos asimismo p

Respecto al experimento E_n consideramos los siguientes sucesos:

A^K : "Al repetir E n veces, el suceso A se ha verificado exactamente K veces"

A_i : "En la i-ésima repetición de E se ha verificado el suceso A"

Nuestra intención es calcular $p(A^K)$ en función de $p(A)$

Una posibilidad de que se verifique A^K es que se verifique el suceso

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_K \cap \bar{A}_{K+1} \cap \bar{A}_{K+2} \cap \ldots \cap \bar{A}_n$$

Como lo que ocurre en una prueba de E no influye de ninguna forma para las siguientes, los sucesos que aparecen en esa intersección son independientes, con lo que $p(A_1 \cap \ldots \cap A_K \cap \bar{A}_{K+1} \cap \ldots \cap \bar{A}_n) = p(A_1) \cdot \ldots \cdot p(A_K) \cdot p(\bar{A}_{K+1}) \cdot \ldots p(\bar{A}_n) =$

$$= p(A) \cdot \overset{(K}{\ldots} \cdot p(A) \cdot p(\bar{A}) \cdot \overset{(n-K}{\ldots} \cdot p(\bar{A}) = (p(A))^K \cdot (p(\bar{A}))^{n-K} = (p(A))^K \cdot (1-p(A))^{n-K}$$

Cualquier otra posibilidad de que se verifique A^K consiste en una permutación del orden de aparición de A y $\bar{A}$. El total de posibilidades es $P_n^{K,n-K}$, pero ocurre que $P_n^{K,n-K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} = \binom{n}{K}$. Es obvio que cualquiera de esas posibilidades tiene la misma probabilidad que la que hemos escrito al principio, es decir: $(p(A))^K \cdot (1-p(A))^{n-K}$

A^K es el suceso unión de todas esas posibilidades, las cuales son incompatibles (si ocurre una, no puede ocurrir ninguna otra en el mismo experimento E_n), luego $p(A^K)$ es la suma de todas esas probabilidades iguales.

Por tanto,

$$\boxed{p(A^K) = \binom{n}{K} (p(A))^K \cdot (1-p(A))^{n-K}}$$

Curso de Orientación Universitaria

Examen final

Primer parcial

1. Definición de espacio vectorial
2. Calcular Inv $(A+2A^t-AB)$
3. Calcular det (C)
4. Estudiar y resolver el sistema [S]

Segundo parcial

5. Estudiar y resolver el sistema [T] según los valores de n
6. Vector perpendicular a un plano afín.
7. Demostrar que r_1 y r_2 se cruzan. Hallar las ecuaciones implícitas de la recta perpendicular a ambas.
8. Encontrar la ecuación general del plano que pasa por P y es perpendicular a la recta que pasa por P y R

Tercer parcial

9. Enunciar y demostrar el teorema del valor medio
10. Enunciar y demostrar la regla de Barrow
11. Desarrollo de MacLaurin de orden 3 de $f(x)=e^{-x}+\operatorname{sen} 2x$
12. Calcular el área comprendida entre el eje de abscisas

Valor de cada pregunta: dos puntos y medio

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\-1&1&3&1\\0&2&-1&1\\2&0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$[S]\begin{cases}x-y=-1\\2y+z=0\\x+y+z=-1\end{cases}\qquad [T]\begin{cases}2x-y=n\\nx+2y=0\end{cases}\qquad P=(5,0,1)$$

$$r_1\equiv\begin{cases}y=0\\2x+z=2\end{cases}\qquad r_2\equiv\begin{cases}z=0\\x-y=-2\end{cases}\qquad R=(2,0,-3)$$

Curso de Orientación Universitaria

Examen final para elevar calificación

(1) Exponer un método que use el cálculo diferencial para calcular la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$. Poner un ejemplo de utilización del método, comprobando el resultado.

(2)

$$\int_e^{\pi} \left[(1, x, x^2) \cdot (\ln^2 x, \operatorname{sen} x, x) \right] dx$$

Nota: el $\cdot$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$

C.O.U. B

Fecha: M.18.3.1986 Examen de recuperación de la segunda ev. Tiempo: 50'

1p. (1) Hallar las matrices inversas de $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

3p. (2) Discutir el sistema $\begin{cases} 2x + my = m-6 \\ (m-2)x + 12y = 0 \end{cases}$

1p. (3) Definición de producto escalar

2.5p. (4) Hallar el ángulo que forman las rectas $\begin{cases} x = 1 \\ y - z + 4 = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} y = 2 \\ x + 2z - 4 = 0 \end{cases}$

2.5p. (5) Hallar la perpendicular común a las dos rectas anteriores

Para elevar la calificación

(1) Siendo $A = (1,2,3)$, $B = (4,5,4)$ y $r \equiv \begin{cases} 3x + z - 11 = 0 \\ y + z - 7 = 0 \end{cases}$, encontrar todos los punto

$P \in r \mid \vec{PA} \perp \vec{PB}$

(2) Demostrar que todos los sistemas de ecuaciones lineales de 3 ecuaciones con 5 incógnitas tienen infinitas soluciones

Curso de Orientación Universitaria

Examen de tercer parcial para elevar calificación

Tema: "Análisis"

1. Relaciona el teorema de los incrementos finitos y el teorema del valor medio del cálculo integral para funciones continuas

2. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica lo siguiente: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Entonces la expresión $\int_0^\infty f(x)\,dx$ no tiene ningún sentido. ¿Por qué? Intentar dar una definición para dar algún valor a esa expresión.

Poner un ejemplo de función f y aplicarle vuestra definición para intentar calcular $\int_0^\infty f(x)\,dx$.