AL 1

Álgebra

1. Definición de espacio vectorial.

Ⓡ Producto cartesiano, función

Ⓔ $\mathbb{Z}$, + ; $\mathbb{R}$, · ; G ; $*$

Definición de ley de composición interna

Sea G un conjunto. Se dice que $*$ es una l.c.i. (u operación interna) en G cuando $*: G \times G \longrightarrow G$ es una aplicación

Notación: $*(a,b) = a * b$

Ejemplos

a) Usuales

b) Por tabla de Cayley

Problema

Resolver ecuaciones en $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ y generalizar a $(G, *)$

Definición de grupo

Sea G un conjunto. Se dice que el par $(G, *)$ es un grupo cuando

0. $*$ es una l.c.i. en G [G es cerrado para $*$]

$$\forall a, b \in G : a * b \in G$$

1. Existencia de elemento neutro
2. Existencia de elemento simétrico
3. Propiedad asociativa

$(G, *)$ se llama grupo abeliano o conmutativo cuando es grupo y se verifica

4. Propiedad conmutativa

Propiedades

1. El elemento neutro es único
2. Cada elemento tiene un único simétrico

Demostración

(...)

Proposición

Sea $(G, *)$ un grupo. Las siguientes ecuaciones tienen una única solución cada una:

1. $a * x = b$
2. $x * a = b$

Demostración

(...)

Notaciones

1. Aditiva

$* : +$

$e : 0$ (nulo)

$a' : -a$ (opuesto)

$a + (-b) = a - b$

2. Multiplicativa

$* : \cdot$ (omisible)

$e : 1$ (unidad)

$a' = a^{-1} = \frac{1}{a}$

Si $*$ es conmutativa $ab^{-1} = \frac{a}{b}$

Definición de cuerpo

Sea K un conjunto y $+$ y $\cdot$ dos l.c.i. Se dice que la terna $(K,+,\cdot)$ es un cuerpo cuando

1. $(K,+)$ es un grupo abeliano
2. $\cdot$ es asociativa
3. $\exists\ 1$
4. $\forall a \in K - \{0\}\ \exists\ a^{-1} \in K$
5. $\cdot$ es distributiva respecto a $+$

Un cuerpo se llama abeliano o conmutativo cuando $\cdot$ es conmutativa

Ejemplos

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Propiedades

Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo. $\forall a,b \in K$:

I. $a \cdot 0 = 0 \ \wedge\ 0 \cdot a = 0$

II. $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \ \vee\ b = 0$

III. $(-a)b = -(ab) = a(-b) \longrightarrow = -ab$

IV. $(-1)a = -a$

Demostración

I. $a = a \cdot 1 = \dots$

$a = a + 0 = \dots$

$(\dots)$

E Producto de escalar y vector

Definición de ley de composición externa

Sean G y K dos conjuntos. Se dice que $*$ es una ley de composición externa a G con escalares en K cuando

$$*: K \times G \longrightarrow G$$ es una aplicación

Notación $*(\alpha, a) = \alpha * a$

Definición de espacio vectorial

Sea V un conjunto con la l.c.i. $+$, $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y una l.c.e. en V con escalares en K. Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un e.v. sobre $(K, +, \cdot)$ cuando

a) $(V, +)$ es un grupo abeliano

b) La l.c.e. verifica $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$

1. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
2. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
3. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$
4. $1\vec{a} = \vec{a}$

Los elementos de V se llaman vectores y los de K escalares

E Estructuras algebraicas

1. l.c.i.	2 l.c.i.	1 l.c.i. + 1 l.c.e.
Monoide	Anillo	Módulo
Semigrupo	Anillo unitario	E. v.
Grupo	Dom. integridad	
	Cuerpo	

Propiedades

$\forall \alpha \in K, \ \forall \vec{a} \in V:$

I. $0 \vec{a} = \vec{0}$

II. $\alpha \vec{0} = \vec{0}$

III. $(-1) \vec{a} = -\vec{a}$

IV. $\alpha \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \vec{a} = \vec{0}$

Demostración

(...)

II. $\alpha \vec{0} = \alpha \vec{0} + \vec{0} \Rightarrow \alpha(\alpha \vec{0}) = \alpha(\alpha \vec{0}) + \alpha \vec{0} \Rightarrow \alpha \vec{0} = \vec{0}$

2. Base de un espacio vectorial

A partir de ahora $(V,+,\cdot)$ será un e.v. sobre $(\mathbb{R},+,\cdot)$

Sistema

Llamamos sistema (o sistema de vectores) a cualquier subconjunto de V

Dependencia e independencia lineal

Sea $S=\{\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k\}$ un sistema

1. Se dice que S es un sistema libre (o que $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k$ son linealmente independientes) cuando

$$\lambda_1\vec{a}_1+\dots+\lambda_k\vec{a}_k=\left[\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec{a}_i\right]=\vec{0}\Rightarrow\lambda_1=\dots=\lambda_k=0$$

2. Se dice que S es un sistema ligado (o que $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k$ son linealmente dependientes) cuando S no es libre, es decir:

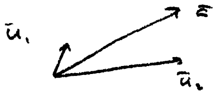
$$\exists\,\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R} \text{ no todos nulos} \mid \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec{a}_i=\vec{0}$$

Ejemplos

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Combinación lineal

E



$\vec{a}\in V$ es c.l. de $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k\in V$ cuando $\exists\,\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}\mid\vec{a}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec{u}_i$

Ejemplos y ejercicios

En $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$

Proposición

$\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}$ ligado $\Leftrightarrow \exists\ \bar{a}_i$ c.l. de los demás

Demostración

(...)

Sistema de generadores

Se dice que $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}$ es un sistema de generadores de $(V, +, \cdot)$ cuando todo elemento de V es c.l. de $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}$, es decir:

$$\forall \bar{a} \in V\ \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \mid \bar{a} = \sum \lambda_i \bar{u}_i$$

Ejemplo

En $\mathbb{R}^2$

Base

Un sistema es base de un espacio vectorial cuando es libre y sistema de generadores

Ejemplo

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Dimensión

Dimensión de un e.v. es el número de elementos de una base cualquiera

(E) ....

Teorema

Sean $(V,+,\cdot)$ e.v. de dimensión n sobre $(\mathbb{R},+,\cdot)$ y $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ base de V. Entonces

$$\forall \vec{x} \in V \ \exists! \ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{u}_i$$

Coordenadas

$$\text{coord}_B : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{x} \longrightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

(E) Es un isomorfismo

Por tanto: $\text{coord}_B(\vec{x}) = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \vec{x} = \sum x_i \bar{u}_i$

Demostración del teorema

$\exists$) B base $\Rightarrow$ B sist. gen. $\Rightarrow$ $\vec{x}$ es c.l. de $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \mid \vec{x} = \sum x_i \bar{u}_i \Rightarrow \exists \ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \mid \vec{x} = \sum x_i \bar{u}_i$

$\exists!$) Supongamos $\exists \ (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \sum x_i \bar{u}_i \wedge \vec{x} = \sum y_i \bar{u}_i$.

$\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \sum x_i \bar{u}_i = \sum y_i \bar{u}_i \Rightarrow \sum x_i \bar{u}_i - \sum y_i \bar{u}_i = \sum (x_i - y_i) \bar{u}_i = \vec{0} \Rightarrow$

$\overset{B \text{ libre}}{\Rightarrow} x_i - y_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow x_i = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$

Ejemplos y ejercicios

a) Demostrar que algo es base

b) Calcular coordenadas.

3. Aplicación lineal

(E) Aplicaciones entre estructuras

Aplicación lineal

Sean $(V,+,\cdot)$ y $(V',+,\cdot)$ e.v. sobre $(\mathbb{R},+,\cdot)$ y

$f: V \to V'$ aplicación.

Se dice que f es una aplicación lineal cuando

1. $\forall \vec{a},\vec{b} \in V: \quad f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$
2. $\forall \vec{a} \in V \ \forall \alpha \in K: \quad f(\alpha\vec{a}) = \alpha f(\vec{a})$

Propiedades

I. $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_{V'}$

II. $\forall \vec{a} \in V: \quad f(-\vec{a}) = -f(\vec{a})$

Demostración

I. $\vec{u} \in V; \quad f(\vec{u}) = f(\vec{u}+\vec{0}_V) \overset{1}{=} f(\vec{u}) + f(\vec{0}_V) \Rightarrow f(\vec{0}_V) = \vec{0}_{V'}$

II. $f(-\vec{a}) = f((-1)\vec{a}) = (-1)f(\vec{a}) = -f(\vec{a})$

Lineales de V en V'

$\mathcal{L}(V,V') = \{ f: V \to V' \mid f \text{ es a. l.} \}$

Proposición

$f \in \mathcal{L}(V,V') \iff \forall \alpha,\beta \in K \ \forall \vec{a},\vec{b} \in V: \ f(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b})$

Dem. como ej.

Aplicación identidad

Siendo V un e.v. de dim n, se llama aplicación identidad a

$$I_n : V \to V$$
$$\vec{x} \to \vec{x}$$

Producto de un escalar y una aplicación

Siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f: V \to V'$ aplicación, se define αf así:

$$\alpha f : V \to V'$$
$$\vec{x} \to \alpha f(\vec{x})$$

Proposición

1. $I_n \in \mathcal{L}(V, V)$
2. $f, g \in \mathcal{L}(V, V') \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}(V, V')$
3. $f \in \mathcal{L}(V, V') \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}(V, V')$
4. $f \in \mathcal{L}(V, V') \wedge f$ biyectiva $\Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{L}(V', V)$
5. $f \in \mathcal{L}(V, V') \wedge g \in \mathcal{L}(V', V'') \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(V, V'')$

Demostración

(...)

Expresión analítica de una a.l.

V e.v. de dim. K, $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_K\}$ base de V

V' e.v. de dim n, $B' = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ base de V'

$f: V \to V'$ a.l.

Llamamos $\quad coord_{B'}(f(\vec{u}_i)) = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \quad i = 1, \dots, k.$

Siendo $\vec{x} \in V$, llamamos $\quad coord_B(\vec{x}) = (x_1, \dots, x_k)$

$$coord_{B'}(f(\vec{x})) = (y_1, \dots, y_n)$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{v}_j \\ \\ f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i f(\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i\right) v_j \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, n: \quad y_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i = a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \dots + a_{kj} x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = a_{11} x_1 + \dots + a_{k1} x_k \\ \vdots \\ y_n = a_{1n} x_1 + \dots + a_{kn} x_k \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad (y_1, \dots, y_n) = (x_1 \dots x_k) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{k1} & a_{kn} \end{pmatrix}$$

(Ecuaciones de f)

Ya se explicará el producto. De momento, notación

[Colocar por filas]

$$\Rightarrow (y_1 \dots y_n) = (x_1 \dots x_k) \; M(f; B, B')$$

Número de filas de M $= \dim(V)$

columnas $= \dim(V')$

<u>Bases canónicas</u>

$$C_n = \{ (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1) \} \subset \mathbb{R}^n$$

$$coord_{C_n}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

4. Matrices y determinantes

Definiciones sobre matrices

Si A es un conjunto, se llama matriz de orden $K \times n$ a la reunión de Kn elementos de A en K filas y n columnas. Usaremos $A = \mathbb{R}$.

Al conjunto de todas las matrices de orden $K \times n$ se le llama $\mathcal{M}_{K,n} = \mathcal{M}_{K\times n}$

Si $M \in \mathcal{M}_{K,n}$ se puede escribir así: $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{K1} & \cdots & a_{Kn} \end{pmatrix} = [\quad]$

y de forma simplificada $M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,n}} = [\quad]$, donde

a_{ij} se llama elemento general de M

Llamaremos líneas de M a sus filas y columnas, indistintamente.

Si $K = n$ la matriz se llama cuadrada. Podemos considerar sus diagonales principal y secundaria. Llamamos $\mathcal{M}_{n,n} = \mathcal{M}_n$, matrices cuadradas de orden n

Matriz unidad de orden n es $I_n = (\delta_{ij})$

Si $K = 1$ la matriz se llama matriz fila

Si $n = 1$ " " " " " columna

Para que dos matrices sean iguales deben ser del mismo orden y tener sus elementos correspondientes iguales.

Ejercicio

Demostrar que $M(I_n; B, B) = I_n$

Suma de matrices

Dos matrices se dice que son sumables cuando son del mismo orden. En ese caso la suma se efectúa elemento a elemento. Ejemplo: (...)

$$+ : \mathcal{M}_{k,n} \times \mathcal{M}_{k,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{k,n}$$

$$((a_{ij}), (b_{ij})) \longrightarrow (a_{ij} + b_{ij})$$

Proposición

$$M(f+g ; B, B') = M(f ; B, B') + M(g ; B, B')$$

Producto de un escalar ~~y~~ una matriz

Para multiplicar la matriz M por el escalar α basta multiplicar todos los elementos de M por α. Ejemplo: (...)

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{kn} \longrightarrow \mathcal{M}_{k,n}$$

$$(\alpha, (a_{ij})) \longrightarrow (\alpha a_{ij})$$

Proposición

$$M(\alpha f ; B, B') = \alpha M(f ; B, B')$$

Producto de matrices

Dos matrices se dice que son multiplicables cuando el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda. En ese caso el producto se efectúa así: Ej: (...)

$\cdot : \mathcal{M}_{k,n} \times \mathcal{M}_{n,p} \longrightarrow \mathcal{M}_{k,p}$

$$\left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots k\\ j=1\dots n}} , (b_{jr})_{\substack{j=1\dots n\\ r=1\dots p}} \right) \longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jr} \right)_{\substack{i=1\dots n\\ r=1\dots p}}$$

Proposición

$$M(g\circ f;\, B, B'') = M(f; B, B') \cdot M(g; B', B'')$$

Potencia de una matriz

Si $A \in \mathcal{M}_n$ se define $A^k = A \cdot A \cdot \overset{k}{\dots} \cdot A$

Una matriz cuadrada es nilpotente cuando $\exists k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0$

Matriz traspuesta

Ejemplo: $(\dots)$

$$^t : \mathcal{M}_{k,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,k}$$
$$(a_{ij}) \longrightarrow (a_{ji})$$

Determinante de una matriz

El determinante de una matriz cuadrada es un número

Las matrices que no son cuadradas no tienen determinante

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}$, el determinante de A se designa por cualquiera de estos símbolos: $\det(A)$, $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}$

El determinante de una matriz cuadrada de orden n se define mediante una fórmula general que es de difícil aplicación práctica cuando $n > 3$.

Aplicada a $n = 1$: $|a_{11}| = a_{11}$

Aplicada a $n = 2$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

Aplicada a $= 3$: (...) Regla de Sarrus

Orden de un determinante es el orden de la matriz cuadrada corresp.

Para calcular determinantes de orden superior se reducen a determinantes de orden 2 ó 3 utilizando las propiedades que poseen.

Propiedades de los determinantes

1. $|A| = |A^t|$
2. Si se intercambian dos líneas paralelas el determinante cambia de signo
3. Si se multiplica una línea de un determinante por un número, todo el determinante queda multiplicado
4. Un det. con dos líneas paralelas iguales es nulo
5. proporcionales
6. $|(\Sigma)| = \Sigma(| \ |)$

7. Si una línea es comb. lineal de dos líneas paralelas, el det. es nulo

8. Se puede sustituir una línea por la suma de ella más un múltiplo de otra paralela

9. Cualquier determinante se puede transformar en otro que tiene una línea compuesta por un uno y el resto ceros.

10. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Submatrices

Se llama submatriz de A a cualquier matriz obtenida a partir de A suprimiendo cualquier cantidad de líneas.

Menor complementario

Si $A = (a_{ij})_{i,j=1 \dots n}$, se llama menor complementario del elemento a_{ij} al determinante de la submatriz de A obtenida con la eliminación de la fila i y la columna j. Se designa α_{ij}

Adjunto

Adjunto de a_{ij} es $(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ y se designa por A_{ij}

Mapa de signos

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

Desarrollo de un det. por los adjuntos de una línea

Un det. se puede calcular multiplicando los elementos de una línea cualquiera por sus adjuntos y sumando los resultados. Ejemplo: (...)

Cálculo de det. de orden sup. a 3

Primero se transforma en un determinante que tenga una línea formada por ceros y un uno (ó −1) y luego se desarrolla por los adjuntos de esa línea, con lo que queda convertido en un determinante de orden una unidad menos. El proceso continúa hasta llegar a un determinante de orden 2 ó 3

Matriz adjunta

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, se llama matriz adjunta de A a la matriz $adj(A) = (A_{ij})$

Matriz inversa

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Se llama matriz inversa de A a otra matriz $B \in \mathcal{M}_n$ que verifique

1. $AB = I_n$
2. $BA = I_n$

Se denota $B = A^{-1}$

Contraejemplo

$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$ no tiene inversa

Matrices singulares y regulares

$A \in \mathcal{M}_n$ es singular cuando $\det(A) = 0$ y regular cuando $\det(A) \neq 0$

Proposición

Las matrices singulares no tienen inversa

Demostración

(...)

Proposición

Si $A \in \mathcal{M}_n$ es regular, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A^t)$

(Se puede tomar $(\operatorname{adj}(A))^t$)

Demostración: [con Lema]

Menores de una matriz

Menor de orden h de $A \in \mathcal{M}_{n \times k}$ es el determinante de una submatriz cuadrada de orden h de A.

Menor principal de orden h es el determinante de la submatriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{hh} \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

Es el orden del menor no nulo de mayor orden. Se denota $rg(A)$

Propiedades

1. $rg(A) = rg(A^t)$
2. Si se intercambian dos líneas paralelas el rg no varía
3. Si se suprime una línea formada por ceros el rg no varía
4. Si se suprime una línea que sea c.l. de otras paralelas el rg no varía

Lema

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{kn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,n}$ con $k < n$. Entonces si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1(k-1)} & a_{1k} \\ & \ddots & & \\ & & a_{k(k-1)} & a_{kk} \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1(k-1)} & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & a_{k(k-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$, la fila k es c.l. de las demás.

Cálculo del rg. de una matriz

1. Método " ". Consiste en buscar un menor no nulo empezando por el de mayor orden posible
2. Método de ampliación de menores. Consiste en transformar la matriz dada en otra que tenga sus menores principales $\neq 0$, ampliando el orden de éstos cuando sea posible
3. Método de Gauss

5. Sistemas de ecuaciones lineales

Definiciones

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de igualdades de la forma

$$[S]\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots \qquad\qquad\qquad = d_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots \qquad + a_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

Los a_{ij} se llaman coeficientes $(i=1,\dots,k\ ;\ j=1\dots n)$

Los x_j se llaman incógnitas

Los d_i se llaman términos independientes

La n-upla $(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}^n$ se dice que es una solución de $[S]$ cuando sustituyendo las x_j por las s_j se verifican todas las igualdades.

Expresión matricial

C = matriz de los coeficientes

A = matriz ampliada

El sistema $[S]$ se puede escribir como

$$C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix}$$

Clasificación

Sist. ec. lin.
- No hom. $\exists d_i \neq 0$
  - Incompatibles $\nexists$ sol.
  - Compatibles
    - Determinados $\exists!$ sol.
    - Indeterminados $\exists\ \infty$ sol.
- Homogéneos $\forall d_i = 0$
  - Incompatibles sólo tiene la sol. trivial $(0, 0, \dots, 0)$
  - Compatibles tiene alguna sol. no trivial (luego tiene ∞)

Sistemas de Cramer

[S] es un sistema de Cramer cuando

1. $k = n$
2. $|C| \neq 0$

Los sistemas de Cramer tienen una única solución, luego si son homogéneos son incompatibles y si son no homogéneos son compatibles y determinados

Regla de Cramer

Si [S] es un sistema de Cramer $\forall j = 1, \dots, n$:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & d_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & d_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|C|}$$

Demostración

(...)

Sistemas equivalentes

Dos sist. de ec. se dice que son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones. Escribiremos $[S] \sim [S']$

Propiedades

Se obtiene un sistema equivalente a otro dado con las siguientes transformaciones:

1. Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero
2. Sumar a una ecuación una comb. lineal de las demás
3. Suprimir una ec. que sea c.l. de las demás

Teorema de Rouché

$[S]$, C, A.

1. $rg(A) > rg(C) \Rightarrow [S]$ no tiene sol.
2. $rg(A) = rg(C) \Rightarrow [S]$ tiene alguna sol.

   Llamamos $r = rg(A)$

   a) $r = n \Rightarrow [S]$ tiene una solución

   b) $r < n \Rightarrow [S]$ tiene infinitas soluciones

   $r < n \Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{N} \mid r + t = n$

   r incógnitas se pueden expresar en función de las t restantes.

   Se dice que las soluciones forman una familia t-paramétrica.

Estudio particular

a) $[S]$ no homogéneo

$rg(A) > rg(C) \Rightarrow [S]$ incompatible

$rg(A) = rg(C) = r \Rightarrow [S]$ compatible

$r = n \Rightarrow [S]$ determinado

$r < n \Rightarrow [S]$ indeterminado

b) $[S]$ homogéneo

Necesariamente $rg(A) = rg(C) \; (= r)$

$r = n \Rightarrow [S]$ incompatible

$r < n \Rightarrow [S]$ compatible

AL - P1

Estudiar si algo es grupo

Resolver $ax+b=c$ en un cuerpo

Si a un sist. ligado se le añade un vector, sigue siendo ligado
" " " gen " " quita " " " " gen.
" " " " libre " " " " " " libre

Todo sistema que cont. al $\vec{0}$ es ligado

$\{\bar{a},\bar{b}\}$ libre $\Rightarrow \{\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}-\bar{b}\}$ libre

Es cero el producto de los elem. de una fila por los adj. de otra paralela

Matrices con condiciones y ej. determinado

Dadas soluciones, hallar ec.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Operaciones varias como $\begin{vmatrix} \mathrm{rg}(A) & |B| \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$

¿ $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ libre $\Rightarrow \{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}, \bar{a}+\bar{b}, \bar{a}\}$ libre , $\{\bar{a}+\bar{c}, \bar{a}-\bar{c}, \bar{a}\}$?

Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación $|A - xI| = 0$

PROBLEMAS

Datos

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \to (x+y, 2y, -x+y)$; $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x,y,z) \to (y-z, 2x+z, 3y, -x)$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} ; \quad B_2 = \{(-1,1), (2,0)\}$$

$$B_3 = \{(0,1,1), (1,0,1), (0,0,-1)\} ; \quad B_4 = \{(0,1,3,0), (1,0,3,0), (1,-3,0,1), (0,1,1,0)\}$$

Problemas

1. Calcular $A = \frac{1}{4}(P^t \cdot P)$, $B = Q \cdot Q^t$, $C = Q^t \cdot Q$, A^2, B^3, $C - 4I_4$, $3A - 2B$

2. Hallar el determinante y el rango de P, Q, A, B, C, A^2, B^3 y $(C + 2I_4)$

3. Demostrar que B_2 y B_3 son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

4. Hallar $\text{coord}_{B_2}(x,y)$ y $\text{coord}_{B_3}(x,y,z)$

5. Demostrar que f y g son aplicaciones lineales

6. Hallar $M(f; C_2, C_3)$ y $M(g; C_3, C_4)$

7. Hallar $M(f; B_2, C_3)$ y $M(g; B_3, C_4)$

8. Demostrar que $M(f; B_2, B_3) = P$ y $M(g; B_3, B_4) = Q$

9. Decir tres matrices $A \in \mathcal{M}_{5,5}$ sin elementos nulos que verifiquen $a_{11} = 1 = a_{15}$; $a_{51} = 2 = a_{55}$, que tengan rango 2, 3 y 4

10. Hallar el rango de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que $(A = \{a+b\sqrt{2} / a,b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$ es espacio vectorial sobre $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

2. Sean $(K, +, \cdot)$ un cuerpo conmutativo, $x, y \in K$. Demostrar $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y \vee x = -y$

3. Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo. Demostrar que $\forall a \in A: \ a \cdot 0 = 0 \wedge 0a = 0$

4. Demostrar que $B = \{(-1,-2), (0,2)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$. Encontrar $coord_B((x,y))$

5. Demostrar $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ sist. ligado $\Rightarrow \forall \vec{a}_{k+1} \in V: \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}\}$ ligado

6. " " $\Leftrightarrow \exists \vec{a}_i$ comb. lineal de los demás.

7. Todo sistema que contenga al vector nulo es ligado.

8. Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo. Estudiar las ecuaciones a) $a + x = b$
   b) $ax = b$

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^t, $A \cdot A^t$, $A^t \cdot A$, A^2, $(A^t)^2$, $(A \cdot A^t)^2$, $(A \cdot A^t)^3$, $(A^t A)^2$ y sus determinantes.

10. Calcular $rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$ utilizando la regla de Cramer

12. Resolver el sistema $\begin{cases} -y + z = -2 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$ utilizando la regla de Cramer.

Matemáticas I Curso de Orientación Universitaria Curso 1991-92

Hoja de problemas. ***Tema: Álgebra.*** **Fecha: X.30.10.1991**

1. Estudiar si el vector (3,8,1) es combinación lineal de los vectores (1,0,-1), (3,1,2) y (4,1,1).

2. a) Estudiar si el sistema { (0,0), (7,6) } es libre.
   b) Estudiar si el sistema { (0,0,0), (1,1,1), (1,2,1) } es libre.
   c) Enuncia y demuestra una propiedad general basándote en los apartados anteriores.

3. Demostrar que si el sistema { $\bar{a}$, $\bar{b}$ } es un sistema de generadores de $\mathbf{R}^2$, también lo es { $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{p}$ }, siendo $\bar{p}$ un vector cualquiera de $\mathbf{R}^2$.

4. f: $\mathbf{R}^3$ -> $\mathbf{R}^3$ es una aplicación definida mediante $f(x,y,z)=(x-y,2x,x+3y)$.
   B = { (1,2,3), (-1,2,3), (0,1,2) } es base de $\mathbf{R}^3$. Hallar $M(f;B,C_3)$.

5. De la aplicación g: $\mathbf{R}^2$ -> $\mathbf{R}^2$ se sabe que g(2,3)=(-2,5) y g(6,9)=(-6,14).
   ¿Se puede afirmar que g es lineal? ¿Se puede afirmar que no lo es?

6. De la aplicación h: $\mathbf{R}^3$ -> $\mathbf{R}^2$ se sabe que g(1,-3,2)=(2,1) y g(-2,1,3)=(0,1).
   ¿Se puede calcular g(0,5,7)? ¿Y g(0,-5,7)?

Matemáticas I Curso de Orientación Universitaria Curso 1991-92

Hoja de problemas. ***Tema: Álgebra.*** **Fecha: L.25.11.1991**

1. Demostrar que si el sistema { $\bar{a}$, $\bar{b}$ } es un sistema libre de $\mathbf{R}^2$, también lo es { $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{a}-\bar{b}$ }.

2. f: $\mathbf{R}^3$ -> $\mathbf{R}^3$ es una aplicación definida mediante $f(x,y,z)=(x+2y,0,x)$ y
   B = { (2,-2,1), (1,0,1), (0,1,0) } una base de $\mathbf{R}^3$.
   a) Calcular $coord_B(x,y,z)$; b) Hallar $M(f;C_3,B)$.

3. Demostrar que si A, B y C son matrices cuadradas de orden n y $|A|\neq 0$, entonces AB=AC => B=C

4. Escribir 4 matrices cuadradas de orden 4 que tengan rango, respectivamente, 1, 2, 3 y 4

5. Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $|A-xI_2|=0$

6. Calcula el rango de la siguiente matriz. Utiliza los métodos de ampliación de menores y de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matemáticas Curso de Orientación Universitaria Curso 1991-92

Hoja de problemas. *Tema: Matrices.* **Fecha: L.4.11.1991**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[1] $|A|+|B|$ [2] $|A+B|$ [3] $2B-B^t$ [4] $C^{-1}+D^{-1}$ [5] $10C^{-1}+EF$

[6] E^t-F^t [7] $\text{adj}(D)-C^t$ [8] $|C+D|$ [9] $3E-2F^t$ [10] $|FE|$

[11] $|1000D|$ [12] C^2+D^t [13] A^3+B^2 [14] $(E^tE)^3$ [15] $\text{adj}(E)$

Matemáticas I Curso de Orientación Universitaria Curso 1991-92

Examen de recuperación de la 1ª Evaluación. ***Tema: Álgebra.*** **Fecha: L.24.2.1992**

1. Definición de grupo y de grupo abeliano.

2. Definición de espacio vectorial.

3. f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ es una aplicación definida como $f(x,y,z)=(2x,-y+z,-z)$.
   B = { (0,1,0), (3,0,2), (-1,0,-1) } es un sistema de $\mathbf{R}^3$. Se pide:
   a) Demostrar que B es base. b) Calcular $\text{coord}_B(x,y,z)$.
   c) Demostrar que f es una aplicación lineal. d) Hallar $M(f;C_3,B)$

4. Siendo $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&0&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&3&-2\\0&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&0&3\\1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,
   calcular:
   a) $\det(AB-BA)$; b) D^{22} ; c) $A^t + B^2 - C^{-1}$; d) $3|A| - 4|D|^2 + C^t$

5. Discute el sistema [S] $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = k-1 \\ kx + y = 3 \end{cases}$, según los valores de k

<u>Valor de las preguntas:</u> 1: *un punto*; 2, 3 y 4: *dos puntos*; 5: *tres puntos*

Matemáticas I Curso de Orientación Universitaria Curso 1991-92

Examen de subir nota de la 1ª Evaluación. ***Tema: Álgebra.*** **Fecha: L.24.2.1992**

1. (K,+,·) es un cuerpo; a, b, y c son elementos conocidos de K y x es uno desconocido. Se pide:

   a) Sabiendo que $a\neq 0$, resolver la ecuación $ax+b=c$ justificando todos los pasos con las propiedades de los cuerpos
   b) Razonar cuáles serían las soluciones si fuera a=0

2. La siguiente propiedad es cierta en cualquier espacio vectorial: *"Si a un sistema ligado se le añade un vector cualquiera, el sistema sigue siendo ligado"*. Se pide:

   a) Enunciar simbólicamente la propiedad
   b) Demostrarla

3. La siguiente propiedad es cierta: *"La suma de los productos de los elementos de una fila de un determinante de orden n por los adjuntos de una línea paralela es cero"*. Se pide:

   a) Enunciar simbólicamente la propiedad
   b) Demostrarla para el caso $n=3$

C.O.U. B

Fecha: V.13.12.1985 Tiempo: 50' + 2' para mirar apuntes

2p. (1) Definición de grupo abeliano

1p. (2) Siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, hallar $A^2 + 3I_3$

2p. (3) Hallar el rango y el determinante de $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(4) Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (3x+4y, -x+2y)$, $B = \{(-3,1), (2,1)\}$

2p. a) Demostrar que B es base de $\mathbb{R}^2$ escribir $\mathrm{coord}_B(x,y)$.

1p. b) Demostrar que f es aplicación lineal

2p. c) Encontrar $M(f; C_2, B)$

Para subir calificación

(1) Sea $G = \{a, b, c\}$. Definir una l.c.i. en G de modo que $(G, *)$ no sea grupo, pero exista elemento neutro.

(2) Sea $(V, +, \cdot)$ un e.v. sobre $(K, +, \cdot)$, $\vec{a}, \vec{b} \in V$, $\alpha \in K$. ¿Es posible encontrar $\vec{x} \in V \mid \alpha \vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$?

(3) Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n} \mid a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Calcular su determinante

C.O.U. C

Fecha: V. 13-12-1985 Tiempo: 50' + 2' para mirar apuntes

2p. (1) Definición de grupo abeliano

1p. (2) Siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, hallar $A^2 - 5I_3$

2p. (3) Calcular el rango y el determinante de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(4) Siendo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (-2x+2y, 4x-y)$ y $B = \{(1,-2), (1,1)\}$

2p. a) Demostrar que B es base de $\mathbb{R}^2$ y escribir $\text{coord}_B(x,y)$

1p. b) Demostrar que f es aplicación lineal

2p. c) Encontrar $M(f; C_2, B)$

Para subir calificación

(1) Sea $G = \{a, b, c\}$. Definir una l.c.i. en G con elemento neutro de modo que a y b tengan simétrico pero $(G, *)$ no sea grupo

(2) Escribir una matriz $A \in \mathcal{M}_{4,4}$ sin elementos nulos tal que $a_{ij} = i$ cuando $i = j$ y

a) $rg(A) = 1$ b) $rg(A) = 3$

(3) Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo conmutativo. ¿Se pueden resolver las ecuaciones $a + x = b$ y $ax = b$?

M. 27. 1. 1987

3p ① Aplicación lineal: def, ejemplo, expresión analítica, matriz y ecuaciones

1p ② Estudiar si $(5,1,3)$ es c.l. de $(1,0,2)$ y $(6,1,6)$

③ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \to (2x-y,\ 2y+z)$

$B = \{(1,1,1),(-1,0,1),(2,5,-6)\}$, $B' = \{(1,3),(2,-1)\}$

2p a) Demostrar que B' es base de $\mathbb{R}^2$

0.5p b) calcular $\mathrm{coord}_{B'}(x,y)$

3p c) Calcular $M(f; B, B')$

0.5 d) Ecuaciones de f resp. a B y B'

Para subir nota

① Sea $(V,+,\cdot)$ esp. vect., $\vec{a},\vec{b} \in V$ lin. indep.

Demostrar que $\{\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b}\}$ es libre

② Sea $(V,+,\cdot)$ esp. vect., $B = \{\vec{u},\vec{v}\}$ base de V,

$D = \{(-1,3),(2,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$, $f: V \to \mathbb{R}^2$ aplic.

lineal, $M(f; B, D) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $f(2\vec{u}-\vec{v})$

Fecha: X. 16.3.1988 Tiempo: 1h 30' Tema: Álgebra

1p ① Definición de sistema libre

② Siendo $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longrightarrow (2x-z,\ 3y+2z)$ y $B = \{(3,2),(2,1)\}$, se pide:

1p [a) Demostrar que B es base de $\mathbb{R}^2$

b) " " f es aplicación lineal

2p c) Hallar $M(f;\ C_3, B)$

1p ③ Calcular
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

2p ④ Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$, calcular

a) $A^2 + B^t$ b) A^{-1} c) B^{-1} d) $AB - BA$

1p ⑤ Clasificar y resolver
$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 3y - 4z = -3 \\ 7x - 6y - z = -3 \end{cases}$$

2p ⑥ Discutir
$$\begin{cases} Kx + y = 0 \\ 8x + (K-2)y = K-4 \end{cases}$$

Para elevar calificación

① Siendo $(V,+,\cdot)$ e.v. sobre $(\mathbb{R},+,\cdot)$ y $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\} \subset V$ sistema libre, demostrar que $\{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c},\ \bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}\}$ es libre. ¿Lo es $\{\bar{a}+\bar{c},\ \bar{a}-\bar{c},\ \bar{a}\}$?

② Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes. ¿Qué relación hay entre las dimensiones de sus matrices de coef.? ¿Y entre sus rangos?

2p. (1) Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar

AB, BA, A^2, $2A - 3B^t$, $rg(A)$, $rg(B^t)$, $\det((BA)^2)$, $\det(A^t)$

2p. (2) Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(3) Siendo $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \to (2x-y,\ 2y+z,\ 3z) \end{array}$ y $B: \{(1,0,0), (0,2,1), (0,-1,1)\}$

Se pide:

0.5p. a) Hallar $coord_B(3,4,-5)$

2p. b) Hallar $M(f; B, B)$

0.5p. c) Hallar $coord_B(f(3,4,-5))$

1p. (4) Clasificar y resolver el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 5y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{array} \right.$

2p. (5) Discutir el sistema $\left\{ \begin{array}{l} mx - y = 0 \\ 3x + y + z = 2 \\ x + my + z = m \end{array} \right.$

Subir nota

(1) Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación $|A - xI| = 0$

(2) Sean $(V,+,\cdot)$ e.v. sobre $(K,+,\cdot)$ y $S = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$, $T = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$

¿ S y T ligados $\Rightarrow$ $S \cup T$ ligado ?

¿ S y T ligados $\Rightarrow$ $S \cap T$ ligado ?

¿ S y T libres $\Rightarrow$ $S \cup T$ libre ?

¿ S y T libres $\Rightarrow$ $S \cap T$ libre ?

¿ S y T s.g. $\Rightarrow$ $S \cup T$ s.g. ?

¿ S y T s.g. $\Rightarrow$ $S \cap T$ s.g. ?

Curso de Orientación Universitaria

Examen de primer parcial (para elevar la calificación)

Fecha: M.6.12.1983 Tema: "Álgebra lineal"

1. Sean $(V,+,\cdot)$ y $(W,+,\cdot)$ dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $(K,+,\cdot)$. Llamaremos $\vec{0}_V$ y $\vec{0}_W$ a los elementos neutros para la suma de V y W, respectivamente. Sea $f\in\mathcal{L}(V,W)$. Demostrar:
a) $f(\vec{0}_V)=\vec{0}_W$ b) $\forall\vec{u}\in V$: $f(-\vec{u})=-f(\vec{u})$
2. Con todas las notaciones del problema nº 1, sea también g una aplicación de $\mathcal{L}(V,W)$. Se define la aplicación $(f+g)$ así:
$$(f+g)(\vec{u})=f(\vec{u})+g(\vec{u})$$
Demostrar que $(f+g)\in\mathcal{L}(V,W)$.
3. Calcular det(AB)
4. Escribir un sistema no homogéneo compatible con grado de indeterminación 1 que tenga 3 ecuaciones y 3 incognitas. Justifi-- car la respuesta.
5. Demostrar que todos los sistemas de ecuaciones lineales con 5 incognitas y 3 ecuaciones tienen infinitas soluciones.

Valor de cada pregunta: dos puntos.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 2 & -3 \\ 2 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \pi & 2\pi & e & -e \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 8 & 15 \\ \sqrt{7} & \mathrm{Ln}\,2 & -3 & 0 \\ e^3 & e^2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$