Cálculo diferencial

1. Nocions de topología

Definiciones de acotación

Sea $E \subset \mathbb{R}$

1. $K \in \mathbb{R}$ cota sup. de E $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E : x \leq K$
2. inf.
3. E acotado superiormente $\Leftrightarrow$ $\exists K \in \mathbb{R} \mid K$ es cota superior de E
4. inferiormente
5. E acotado $\Leftrightarrow$ E acotado sup. e inf.
6. Si E está ac. sup., se llama supremo de E ($\sup(E)$) a la menor de las cotas sup.
7. ínfimo
8. Si $\sup(E) \in E$, se llama máximo de E ($\max(E)$)
9. mínimo

Ejemplos

Los intervalos

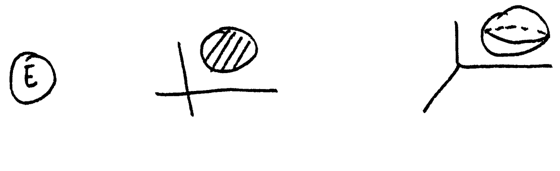
Distancia a $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad d(x,y) = |x-y|$$

Definición de bola

Sean $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$. Bola de centro x y radio ε es

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x,y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$



Entornos de un punto

Sean $x \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$. Se dice que E es un entorno de x cuando

$\exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \mid x \in B(x,\varepsilon) \subset E$.

Los entornos de x se suelen designar como V^x

Si a V^x se le suprime el punto x, el conjunto obtenido se llama entorno perforado de x : $V^x - \{x\}$

Imagen de un conjunto mediante una función

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $E \subset \mathbb{R}$

$f(E) = \{ f(x) \mid x \in E \}$

Definiciones de continuidad

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. f continua en $x_0 \iff \forall\ V^{f(x_0)}\ \exists\ V^{x_0} \mid f(V^{x_0}) \subset V^{f(x_0)}$

   .....

   $\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. f continua por la derecha en $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

3. izquierda

4. f continua en $(a,b) \iff f$ cont. en x, $\forall x \in (a,b)$

5. f continua en $[a,b] \iff f$ cont. en (a,b), cont. por la derecha en b y por la izq. en a

6. $\mathcal{C}([a,b]) = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f$ continua en $[a,b] \}$

Propiedades

$f, g \in C([a,b])$

1. $f+g,\ f \cdot g \in C([a,b])$

2. $\forall x \in [a,b] : g(x) \neq 0 \Longleftrightarrow \frac{f}{g}$ cont. en $[a,b]$

Axioma de Cantor [SOLO EXPLICAR, EQUIVALENCIAS]

Sea $\{ I_n = [a_n, b_n] \mid n \in \mathbb{N} \}$ una sucesión de intervalos cerrados

encajados $(\forall n \in \mathbb{N} : I_n \subset I_{n+1})$ y con $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Entonces $\exists!\ \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

Proposición

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, existe un entorno

de x_0 en el que la función tiene el mismo signo que f.

Demostración

[En Tercero de B.U.P.]

Consecuencia

Si en todo entorno de x_0 la función continua f toma valores

de distinto signo, $f(x_0) = 0$

Teorema de Bolzano

Sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$ | $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo.

Entonces $\exists\, \alpha \in [a,b]$ | $f(\alpha) = 0$

Demostración [SOLO CONTARLO]

Si $f(a) = 0$ ó $f(b) = 0$, trivial

Si $f(a) \neq 0 \neq f(b)$, por divisiones sucesivas de $[a,b]$ se obtiene

$\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ verificando

$sg(f(a)) = sg(f(a_n))$; $sg(f(b)) = sg(f(b_n))$

$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

Por el axioma de Cantor $\exists\, \alpha \in \bigcap [a_n, b_n]$

En cualquier entorno de α f toma valores de distinto signo,

luego $f(\alpha) = 0$

Ejemplo

Consecuencia (Teorema de Darboux)

Si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $f(a) \neq f(b)$ y m es un valor cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces $\exists\ \alpha \in [a,b] \mid f(\alpha) = m$

Demostración

$F(x) = f(x) - m$

Función acotada

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada $\Leftrightarrow$ $f([a,b])$ acotado

Obsérvese que f acotada $\Leftrightarrow \exists\ K_1, K_2 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [a,b]: K_1 \leq f(x) \leq K_2$

Teorema

Sea $f \in \mathcal{C}([a,b])$

1. f es acotada
2. f alcanza máx. y mín absolutos, es decir, $\exists$ máx $(f([a,b]))$ $\wedge$ mín.

Demostración [SUPRIMIR]

1. Sup. f no acotada. Divisiones sucesivas $\to [a_n, b_n]$ en los que f no acotada

Axiom de Cantor $\to \exists\ \alpha \in \bigcap [a_n, b_n]$

f cont. en $\alpha \Rightarrow \exists\ \delta > 0 \mid x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\alpha) - 1, f(\alpha) + 1)$

$\exists\ n \in \mathbb{N} \mid [a_n, b_n] \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$

$x \in [a_n, b_n] \Rightarrow x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\alpha) - 1, f(\alpha) + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\alpha) - 1 < f(x) < f(\alpha) + 1 \quad \forall x \in [a_n, b_n] \Rightarrow f$ ac. en $[a_n, b_n]$, contr.

2. Por (1), f acotada, luego $\exists\ \sigma = \sup f([a,b])$

Sup. $\forall x \in [a,b] : f(x) < \sigma \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\sigma - f(x)}$ cont. $\Rightarrow$

$\Rightarrow F$ acotada $\Rightarrow \exists\ K \in \mathbb{R} \mid K > 0 \wedge \dfrac{1}{\sigma - f(x)} \leq K \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] : f(x) \leq \sigma - \dfrac{1}{K} \Rightarrow \sigma - \dfrac{1}{K}$ cota sup. de

$f([a,b])$, contradicción, luego $\exists\ x_0 \in [a,b] \mid f(x_0) = \sup f[a,b]$

y $\sup f([a,b]) \in f([a,b])$, luego es máximo.

f cont. $\Rightarrow -f$ cont. $\Rightarrow -f$ alcanza mx. ab. $\Rightarrow f$ alcanza mn. abs.

2. Teoremas de cálculo diferencial

Mx. y mn. abs. y rel.

No tienen ninguna relación. Dibujos

Teorema de Rolle

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ verificando

1. Continua en $[a,b]$
2. Derivable en (a,b)
3. $f(a) = f(b)$

Entonces $\exists \ \alpha \in (a,b) \mid f'(\alpha) = 0$ Dibujos

Demostración

I) f cte.

II) f no constante

f cont. $\Rightarrow$ f alcanza mx. y mn. absoluto en dos puntos.

Como $f(a) = f(b)$, alguno de los dos es distinto de a y b.

Llamémosle α. En α hay un mx. o min. rel.,

luego $f'(\alpha)=0$

Tma. del valor medio (Tma. Cauchy) (T.v.m. generalizado)

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones verificando

1. Continuas en $[a,b]$
2. Derivables en (a,b)

Entonces $\exists\ \alpha \in (a,b) \mid (f(b) - f(a))\, g'(\alpha) = (g(b) - g(a))\, f'(\alpha)$

Si $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$, $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

Demostración

$F(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$

Tma. de los incrementos finitos (Tma. Lagrange) (T.v.m.)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función que verifica:

1. Continua en $[a,b]$
2. Derivable en (a,b)

Entonces $\exists\ \alpha \in (a,b) \mid f(b) - f(a) = f'(\alpha)(b-a)$

Demostración

Tomando $g(x) = x$ en el Tma. Cauchy

Consecuencia

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces

1. $\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente en $[a,b]$
2. $\qquad = \Rightarrow$ constante
3. $\qquad < \Rightarrow$ decreciente.

Demostración

Tomemos $x, y \in [a,b] \mid x < y$

Aplicamos el tma. incr. finitos a $f : [x,y] \to \mathbb{R}$.

$\exists \alpha \in (x,y) \mid f(y) - f(x) = (y-x) f'(\alpha)$

1) $f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow f$ creciente

2) $f(y) - f(x) = 0 \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow f$ cte.

3) $f(y) - f(x) < 0 \Rightarrow f(y) < f(x) \Rightarrow f$ decreciente.

Regla de L'Hôpital

Sean $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ verificando

1. $\exists\, V^{x_0} \mid f, g$ derivables en V^{x_0}
2. $f(x_0) = g(x_0) = 0$
3. Existe $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración

$\forall\, x \in V^{x_0}\ \exists\, \alpha$ entre x y $x_0 \mid \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$. Por tanto

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \lim_{\alpha \to x_0} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ c.q.d.}$$

Observación

También es aplicable la regla de L'Hôpital cuando el límite es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y cuando $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$

3. Crecimiento y convexidad

Polinomio aproximador

Sea $a \in \mathbb{R}$ y f una función suficientemente derivable en U^a

Queremos aproximar f mediante un polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n$$

La aproximación se conseguirá haciendo que f y P_n y sus n primeras derivadas coincidan en a.

$$f(a) = P_n(a) \Rightarrow f(a) = a_0$$

$$f'(a) = P_n'(a) \Rightarrow f'(a) = a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$

....

$$f^{(n}(a) = P_n^{(n}(a) \Rightarrow f^{(n}(a) = n!\,a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n}(a)}{n!}$$

Por tanto $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \dfrac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n =$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Llamaremos a P_n "polinomio aproximador de grado n de la función f en un entorno de a"

Expresión del error

El error cometido cuando se sustituye $f(x)$ por $P_n(x)$ es

$T_n(x) = f(x) - P_n(x)$, luego se puede escribir $f(x) = P_n(x) + T_n(x)$

T_n se llama término complementario de orden n.

Se puede demostrar que $\exists\ \alpha$ entre a y x que verifica:

$$T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$, expresión llamada "forma de Lagrange del término complementario"

Fórmula de Taylor

$f(x) = P_n(x) + T_n(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ con

α entre a y x

"Desarrollo de Taylor de orden n de la función f en un entorno de a"

Fórmula de Mac Laurin

El "desarrollo de Mac Laurin de orden n de la función f" se obtiene haciendo $a=0$ en la fórmula de Taylor.

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \dots + \frac{f^{(n}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}x^{n+1}$$ con α entre 0 y x

Desarrollos notables

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\alpha}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(n+1)(\alpha+1)^{n+1}} x^{n+1}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\operatorname{sen}\alpha}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1) \frac{\operatorname{sen}\alpha}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

Definiciones sobre crecimiento

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ continua en $a \in \mathbb{R}$

1. f creciente en $a \iff \exists V^a \mid \forall x \in V^a : \begin{cases} x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{cases}$

2. decreciente

3. f tiene máx. rel. en $a \iff \exists V^a \mid \forall x \in V^a - \{a\} : f(x) < f(a)$

4. mín.

Estudio del crecimiento

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ suficientemente derivable en un entorno V^a suf. pequeño de a.

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1}(a) = 0 \neq f^{(k}(a)$

El desarrollo de Taylor de orden $k-1$ asegura que

$\forall x \in V^a - \{a\} \ \exists \ \alpha$ entre a y x $\mid$ $f(x) = f(a) + \dfrac{f^{(k}(\alpha)}{k!}(x-a)^k$

$$k \text{ impar} \begin{cases} f^{(k}(a) > 0 \Rightarrow f^{(k}(\alpha) > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ crec. en a} \\ \qquad < \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{decrec.} \end{cases}$$

$$k \text{ par} \begin{cases} f^{(k}(a) > 0 \Rightarrow f(x) > f(a) \Rightarrow f \text{ tiene mn. rel. en a} \\ f^{(k}(a) < 0 \Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \text{mx.} \end{cases}$$

Ejemplo

Est. crec. de una función en un punto

Regla mx. y mn.

1. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = x_1, \ldots, x_n$. Para cada x_i:

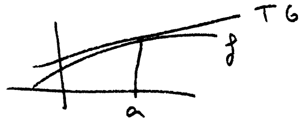
2. Hallar k

3. k impar $\rightarrow$ ni mx. ni mn. rel.

   k par $\rightarrow \begin{cases} f^{(k}(x_i) > 0 \rightarrow \text{mn. rel.} \\ f^{(k}(x_i) < 0 \rightarrow \text{mx. rel.} \end{cases}$

Definiciones sobre convexidad

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ derivable en $a \in \mathbb{R}$ y $TG(x)$ la tangente a f en a



1. f convexa en a $\iff \exists V^a \mid \forall x \in V^a - \{a\} : f(x) < TG(x)$
2. cóncava $\quad >$
3. f tiene un p.i. en a $\iff$ f pasa de cóncava a convexa en a o viceversa,

   es decir: $\exists V^a \mid \forall x \in V^a - \{a\} : f(x) < TG(x)$ y $f(x) > TG(x)$ al otro.

Estudio de la convexidad [SOLO RESULTADO]

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ suf. deriv. en un entorno V^a suf. peq. de a

Supongamos que $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(k-1}(a) = 0 \neq f^{(k}(a)$

El desarrollo de Taylor de orden $k-1$ de f asegura que

$$\forall x \in V^a - \{a\} \ \exists \alpha \text{ entre } a \text{ y } x \mid f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(k}(\alpha)}{k!}(x-a)^k$$

$$y = TG(x) = mx + q \Rightarrow y' = m = f'(a)$$

Como $TG(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, resulta

$$f(x) = TG(x) + \frac{f^{(k}(\alpha)}{k!}(x-a)^k$$

→ k par $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{(k}(a) > 0 \Rightarrow f^{(k}(\alpha) > 0 \Rightarrow f(x) > TG(x) \Rightarrow f \text{ cóncava en } a \\ < \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{convexa} \end{array} \right.$

→ k impar $\Rightarrow$ $(x-a)$ tiene distinto signo a un lado u otro de a $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-a)^k$ también $\Rightarrow f(x) < TG(x)$ en un lado de a y $f(x) > TG(x)$ al otro $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f tiene un p.i. en a.

CD 16

Ejemplo

Estudiar la convex. de una función en un punto

Regla p.i.

1. $f''(x) = 0 \Rightarrow x = x_1, \dots, x_n$. Para cada x_i :

2. Hallar k

3. k impar $\rightarrow$ es p.i.

   k par $\rightarrow$ no es p.i.

4. Representación de funciones

* Dominio

* Simetrías

* Continuidad

* Periodicidad

$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es periódica cuando $\exists\, T \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \forall x \in \mathbb{R}:$

$$f(x+T) = f(x)$$

T recibe el nombre de periodo.

El menor de los periodos positivos se llama periodo principal.

* Puntos de corte con los ejes

* Crecimiento y convexidad

* Asíntotas y sus puntos de corte con la gráfica

* Cálculo de la tangente en algún punto

La tangente en a pasa por $(a, f(a))$ y

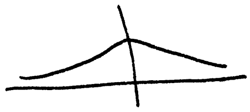
tiene pendiente $f'(a)$

(CD - P)

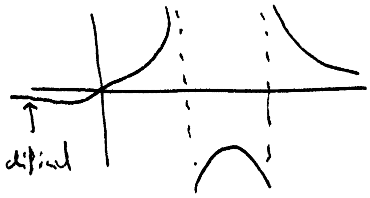
Representación de funciones

Selectividad

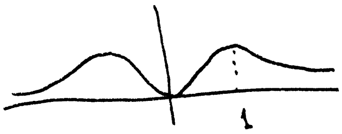
$$\frac{1}{1+x^2}$$



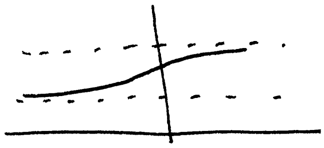
$$\frac{x}{x^2-5x+4}$$



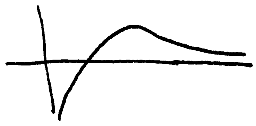
$$x^2 e^{-x^2}$$



$$\frac{1}{1+e^{-x}}+1$$

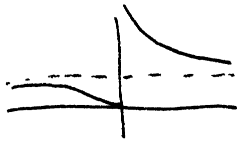


$y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{tgh} x$; $y = \frac{\ln x}{x}$



$y = \frac{x^4-3}{x}$ $\qquad y = \frac{x}{e^x}$ $\qquad y = x + \operatorname{sen} x$

$y = e^{\frac{1}{x}}$



$y = \ln (x^2-1)^2$

$y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ $\qquad y = \ln \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ $\qquad y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$y = \frac{e^x}{x^3-2x}$ (no tiene p.i.) $\qquad y = \ln (x^2+1)$

$y = \frac{x^2}{x^2+1}$

Topología

(a,b) es entorno de todos sus puntos y $[a,b]$ no

E acotado $\Rightarrow \forall a \in E \ \exists \varepsilon > 0 \mid E \subset B(a,\varepsilon)$

1. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Demostrar que alcanza mx. absoluto
2. Enunciar el Tma. Bolzano, tma. Rolle y tma. v. m.

1.5p.

3. Desarrollo de Mc Laurin orden 2 de $f(x) = \ln(1+2x)$
4. Hallar los mx y mn. rel. de $y = \dfrac{x^7}{42} - \dfrac{x^5}{5}$

4p. 5. Repr. graf. $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

Subir nota

1. Repr. graf. $y = \dfrac{e^x}{x^3 - 2x}$ (Ind.: no tiene p.i.)
2. Demostrar que si $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ son derivables y $f' = g'$, entonces $\exists\, C \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = g(x) + C$

1. $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 - x^2 + 10)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 - 2x^4 + 15x - 1)$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7+2x^2}{x^6-x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x-1}{3x^3-12}$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-5x^3}{2x^2+1}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x^2+3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\ln x}$
11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$
12. $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$
13. $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^2$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x \cdot e^x$
15. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$
16. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$
17. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\ln x}$
18. $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x)^x$

19. Calcular los máximos, mínimos rel. y puntos de inflexión de las siguientes funciones:
$f(x) = x^3 - 6x$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2$, $h(x) = e^{x^2}$, $p(x) = e^{x^2-2x}$, $q(x) = \dfrac{1}{x}$
$s(x) = x \ln x$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (coseno hiperbólico).

20. Decir los intervalos de crecimiento, decr., concavidad y convexidad de f, g, q

21. Representar gráficamente las funciones f, g, h, s del (19). Indicación: usar el (12)

22. Representar gráficamente las funciones $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$, $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$