Cálculo integral

1. Métodos de integración

Diferenciales

Sabemos que $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ y $dy = f'(x)\,dx = d(f(x))$

Con las diferenciales se opera igual que con las derivadas, e.d.:

$d(u+v) = du + dv$

$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$

$d(\operatorname{sen} x) = \cos x \, dx$

etc.

Dem: $d(u+v) = (u+v)'\,dx = u'dx + v'dx = du + dv$

$$\int d(f(x)) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

Integración por transformación

Si $\int f(x)\,dx$ no es inmediata, se puede intentar cambiar la expresión de $f(x)$ para conseguirlo

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$\int tg^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx$$

Integración por partes

$d(uv) = du \cdot v + u\,dv \Rightarrow \dots \Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$

Ejemplos y ejercicios

a) Sencillos

b) Para utilizar la fórmula varias veces

c) Integrales "reproductivas": aparece la ~~función~~ integral otra vez al aplicar la f. 2 veces.

d) Cuando es necesario hacer $u = 1$

Integración de funciones racionales (planteamiento)

Una función racional es una función que es cociente de dos polinomios.

Si P y Q son dos polinomios, hay que calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Si la integral no es inmediata, la haremos por transformación

Raíces complejas de un polinomio

Sea $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ un polinomio. $(a_i \in \mathbb{R})$

Se dice que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de Q cuando $Q(z) = 0$

Ejemplos $Q \to a,\ \alpha+\beta i,\ \alpha-\beta i$; $Q \to a, b, a$

Se llama multiplicidad de una raíz al número de veces que se repite.

Nosotros buscamos todas las raíces $z \in \mathbb{C}$ que tenga Q

Ejemplo

Se puede demostrar que

1. $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ tiene n raíces complejas

2. Si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de Q también lo es $\bar{z}$

3. $Q(x) = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n)$, donde x_i son las raíces de Q

Nombre de las raíces:

Si $z \in \mathbb{R}$ es raíz de Q y tiene mult. 1, se llama raíz real simple

" " " " >1, " real múltiple

Si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ " " 1, " compleja simple

" " " " >1, " compleja múltiple.

Supongamos que Q tiene

p raíces reales simples $s_1, \dots, s_p$

q " " múltiples $t_1, \dots, t_q$ con multiplicidades $m_1, \dots, m_q$ y

r parejas de raíces complejas simples $(\alpha_1 + \beta_1 i), (\alpha_1 - \beta_1 i), \dots, (\alpha_r - \beta_r i)$

(Evidentemente $p + m_1 + \dots + m_q + 2r = n$)

Entonces podemos escribir

$$Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n) =$$

$$= a_n (x - s_1) \dots (x - s_p)(x - t_1)^{m_1} \dots (x - t_q)^{m_q} (x - (\alpha_1 + \beta_1 i))(x - (\alpha_1 - \beta_1 i)) \cdot$$

$$\dots (x - (\alpha_r + \beta_r i))(x - (\alpha_r + \beta_r i))$$

Los productos $(x - (\alpha + \beta i))(x - (\alpha - \beta i))$ se pueden escribir como

$(x - \alpha)^2 + \beta^2$ ó $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ según interese

Integración de funciones racionales (resolución)

Sea $Q(x)$ un polinomio **sin** raíces complejas múltiples y $P(x)$ un polinomio cualquiera

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{a_n(x-s_1)\cdots(x-(\alpha_r+\beta_r i))}\,dx$$

$$= \int C(x)\,dx + \frac{1}{a_n}\left[\int \left(\frac{A_1}{x-s_1} + \cdots + \frac{A_p}{x-s_p} + \frac{B_{1,1}}{x-t_1} + \cdots + \frac{B_{1,m_1}}{(x-t_1)^{m_1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cdots + \frac{B_{q,1}}{x-t_q} + \cdots + \frac{B_{q,m_q}}{(x-t_q)^{m_q}} + \frac{C_1 x + D_1}{x^2-2\alpha_1 x+\alpha_1^2+\beta_1^2} + \cdots + \frac{C_r x + D_r}{x^2-2\alpha_r x+\alpha_r^2+\beta_r^2} \right) d\right.$$

donde los coeficientes A, B, C, D han de ser calculados.

Todas las integrales que quedan son inmediatas:

$$\int \frac{1}{x-s}\,dx = \cdots$$

$$\int \frac{1}{(x-t)^6}\,dx = \cdots$$

$$\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}\,dx = \cdots \quad (\ln + \operatorname{arctg})$$

Ejemplos y ejercicios

Calcular los coef.

a) Sólo simples

b) Sólo reales

c) Todo junto (poniendo polinomios como x^4-1)

d) Dividiendo

Integración por cambio de variable

Planteamiento

Se quiere calcular $\int f(x)\,dx$ y se sabe que $x = \varphi(t)$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(t) + c = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C$$

Ejemplos

Integración de funciones trigonométricas

Cualquier f. t. se puede expresar únicamente con sen x y cos x, que aparecerán elevados a potencias.

a) Impar en seno: $\cos x = t$

b) Impar en coseno: $\operatorname{sen} x = t$

c) Par en seno y coseno: $\operatorname{tg} x = t$

$$\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}; \quad dx = \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

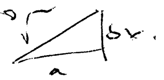
d) Último recurso: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

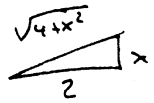
Cambios trigonométricos

$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx \qquad x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t \to a \cos t$

$\int \sqrt{a^2 + b^2x^2}\, dx \qquad x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t \to a \sec t$



$\int \sqrt{b^2x^2 - a^2}\, dx \qquad x = \frac{a}{b} \sec t \to a \operatorname{tg} t$

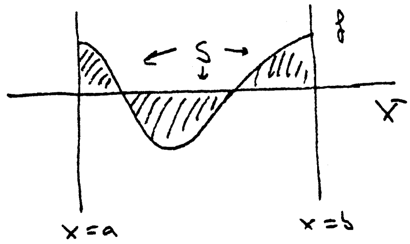
[Para deshacer el cambio 

y similares]

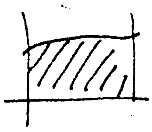
$\int \sqrt{4+x^2}\, dx.$

2. Aplicaciones del cálculo integral

Area determinada por la gráfica de una función, el eje de abscisas y dos rectas verticales.

Se trata de calcular 

, de modo que supondremos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua. [Intentar calcularlo de un tirón]

a) $f>0$  $f(x)>0\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h>0\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int_a^b f>0$$

$S=\int_a^b f$ (intuitivamente, por la definición de integr. definida)

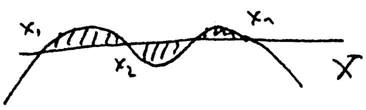
b) $f<0$ (...) $S=-\int_a^b f$

c) Caso general

$f(x)=0 \Rightarrow x=x_1,\dots,x_n\in[a,b]$

$$S=\left|\int_a^{x_1} f\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right|+\dots+\left|\int_{x_n}^b f\right|$$

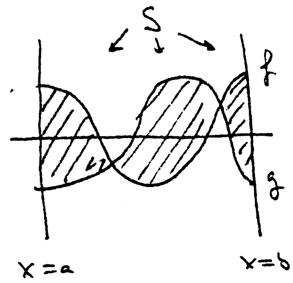
d) Caso particular: área det. por la gráfica de una función g y el eje de abscisas



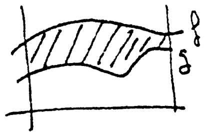
$f(x)=0 \Rightarrow x=x_1,\dots,x_n$

$$S=\sum_{i=1}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\right|$$

Area determinada por las gráficas de dos funciones y dos rectas verticales

Se trata de calcular  , de modo

que supondremos que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas

a) $\forall x \in [a,b]$: $f(x) \geq g(x) \geq 0$ 

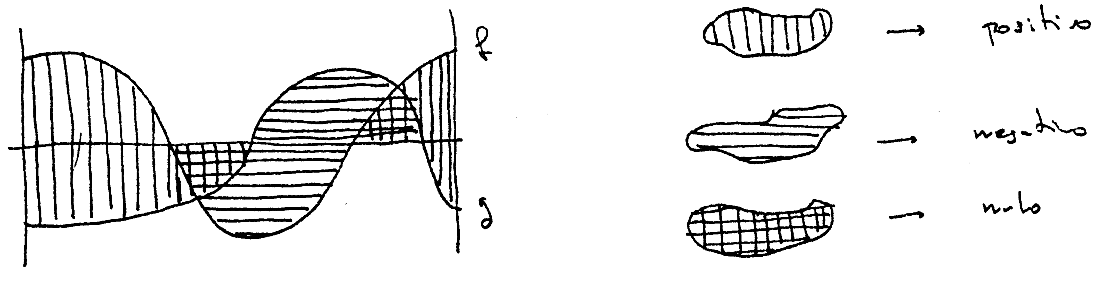
$$S = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$$

Si es necesario, se puede dem. con la regla de B. o con la def.

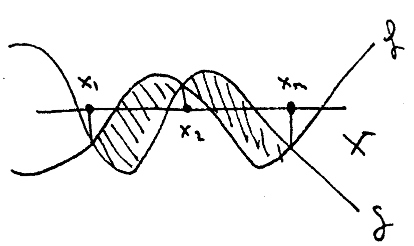
b) Caso general.

$f(x) = g(x) \Rightarrow x = x_1, \ldots, x_m \in [a,b]$

$$S = \left| \int_a^{x_1} (f-g) \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f-g) \right| + \ldots + \left| \int_{x_m}^{b} (f-g) \right| .$$ Justificación



c) Caso particular : área det. por dos funciones

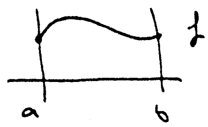


$f(x) = g(x) \Rightarrow x = x_1, \ldots, x_n$

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f-g) \right|$$

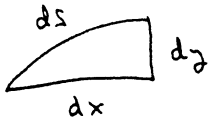
Longitud de una curva

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable.



Se desea calcular la longitud de la curva desde $(a, f(a))$ hasta $(b, f(b))$

Esto recibe el nombre de "rectificación" [Poner recto]

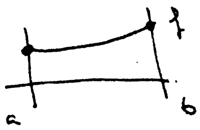


Elemento de arco : $ds \Rightarrow (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

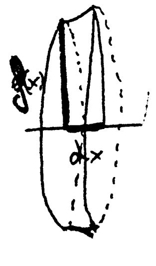
$$\text{Long}_a^b = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \ldots = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Volumen de un cuerpo de revolución

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua



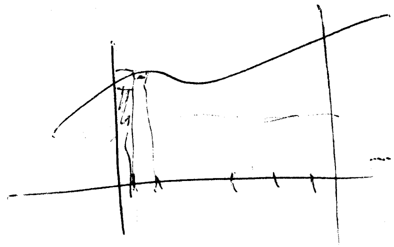
Giramos $G_x(f)$ con eje OX y se genera un volumen



Elemento de volumen : $dV = \pi (f(x))^2 dx$

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b \pi (f(x))^2\, dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

3. Integral de Riemann



Sumas de Riemann

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada

$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición o subdivisión de $[a,b]$ cuando

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\text{Part}([a,b]) = \{\Delta \mid \Delta \text{ es partición de } [a,b]\}$

$d(\Delta) = \text{diámetro}(\Delta) = \max\{x_i - x_{i-1}\}_{i=1,\dots,n}$

f acotada $\Rightarrow$ f acotada en $[x_{i-1}, x_i]$ $(\forall i = 1, \dots, n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, m_i, M_i$ ínfimo y supremo de f en $[x_{i-1}, x_i]$

Suma inferior de Riemann asociada a la partición Δ es

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i$$

Superior :
$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, M_i$$

Propiedades

$\forall \Delta \in \text{Part}([a,b])$

1. $s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta)$

2. $\Delta' = \Delta \cup \{\alpha\} \Rightarrow s(f, \Delta) \leq s(f, \Delta') \wedge S(f, \Delta') \leq S(f, \Delta)$

CI 11

Demostración $\alpha \in [x_{i-1}, x_i]$

$m'_i = \inf(f[x_{i-1}, \alpha]) \Rightarrow m_i \leq m'_i$

$m''_i = \inf(f[\alpha, x_i]) \Rightarrow m_i \leq m''_i$

$(x_i - x_{i-1}) m_i = (x-\alpha) m_i + (\alpha - x_{i-1}) m_i \leq (x-\alpha) m'_i + (\alpha - x_{i-1}) m''_i \Rightarrow$

$\Rightarrow s(f, \Delta) \leq s(f, \Delta')$

3. $\Delta' = \Delta \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \Rightarrow s(f, \Delta) \leq s(f, \Delta') \wedge S(f, \Delta') \leq S(f, \Delta)$

4. $\forall \Delta, \Delta' \in Part([a,b]) : s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta')$

[Demostración $\Delta \cup \Delta'$]

5. $m = \inf(f[a,b]) \Rightarrow (b-a) m \leq s(f, \Delta)$

$M = \sup(f[a,b]) \Rightarrow S(f, \Delta) \leq (b-a) M$

<u>Consecuencias</u>

1. $(b-a) m \leq s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta') \leq (b-a) M$, luego

2. $s = \{ s(f, \Delta) \mid \Delta \in Part([a,b]) \}$ y $S = \{ S(f, \Delta) \mid \Delta \in Part([a,b]) \}$

son acotados.

3. $\exists \sup(s), \inf(S)$

4. $\sup(s) \leq \inf(S)$

CI 12

Definición

Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada se dice que es integrable (Riemann) en $[a,b]$ cuando $\sup(s) = \inf(S)$

Si f es integrable, se escribe

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \sup(s) = \inf(S)$$

Ejemplo

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

Propiedades

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables, $c \in (a,b)$, $k \in \mathbb{R}$

1. kf integrable y $\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$
2. $f+g$ integrable y $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

$\Big\}$ $\int_a^b$ lineal.

3. f integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
4. $\int_a^b f = -\int_b^a f$
5. $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
6. $|f|$ integrable y $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Teorema

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada cumpliendo alguna de las siguientes condiciones:

1. Continua
2. Continua salvo en una cantidad finita de puntos
3. Creciente
4. Decreciente

Entonces f es integrable

Contraejemplo

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

(Función de Direchlet) no es integrable Riemann.

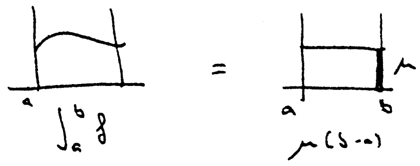
4. Teoremas del cálculo integral

Teorema del valor medio del cálculo integral

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, $m = \inf(f[a,b])$, $M = \sup$

1. $\exists \mu \in [m, M] \mid \int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$

   μ se llama valor medio de f en $[a,b]$



2. $f \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] \mid \int_a^b f = f(\alpha)\,(b-a)$

Demostración

1. $\forall x \in [a,b] : \; m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M \, ;$$

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b \Rightarrow \mu \in [m, M] \wedge \mu(b-a) = \int_a^b f$$

2. $\mu \in [m, M] \wedge f$ continua $\Rightarrow \exists \alpha \in [a,b] \mid \mu = f(\alpha)$

La función área

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable $\Rightarrow \forall x \in [a,b] : f$ ac. e int. en $[a,x] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \int_a^x f(t)\,dt$. Se puede considerar la función

$$A : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt \quad , \text{ función área}$$

Proposición

La función área es continua

Demostración

$$\lim_{x \to x_0} (A(x) - A(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt \overset{\text{T.v.m.c.i.}}{=} \lim_{x \to x_0} (\mu\,(x - x_0)) = 0$$

Teorema fundamental del cálculo integral

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua (∴ ac. e integr.) , la función área $A : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \to \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable en (a,b) y $A' = f$

Demostración

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \underset{\alpha \text{ entre } x \text{ y } x+h}{\overset{\text{T.v.m.c.i.}}{=}} \lim_{h \to 0} \frac{h\,f(\alpha)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\alpha) =$$

$$= f\left(\lim_{h \to 0} \alpha\right) = f(x)$$

Regla de Barrow

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. ($\therefore$ ac. e integr.) y F una primitiva suya. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Demostración

$$\left.\begin{array}{l} \text{T. fund. c.i.} \Rightarrow A'(x) = f(x) \\ F \text{ prim. de } f \Rightarrow F'(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow A'(x) - F'(x) = (A-F)'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - F \text{ cte} \Rightarrow \exists\, C \in \mathbb{R} \mid A(x) = F(x) + C \quad \forall x \in [a,b]$$

$x=a \Rightarrow A(a) = F(a) + C \Rightarrow \dots \Rightarrow C = -F(a)$

$x=b \Rightarrow A(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$, c.d.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Cálculo de primitivas

$$\int \frac{dx}{e^x+1}\, dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{e^{x}}{1+e^{-x}}\, dx = \ldots$$

div. por e^x num. y den.

$$\int x^5 \sqrt{1-x^3}\, dx \qquad 1-x^3 = t^2$$

$$\int x^2 \sqrt{x-1}\, dx \qquad x-1 = t^2$$

$$\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\, dx \qquad x = \frac{1}{t}$$

$$\int \sqrt{1-\sqrt{x}}\, dx \qquad 1-\sqrt{x} = t^2$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \qquad x = \frac{2}{t}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} \qquad x = \frac{1}{t}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$$

$$\int \frac{(e^x-2)\, e^x}{e^x+1}\, dx \qquad t = e^x+1$$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\, dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx \qquad t^2 = 1+x^2$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x+\cos x+1}\, dx \qquad \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right)$$

CI - P

Longitudes de curvas

$y = \ln x$ entre $x = 1$ y $x = \dots$

$y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ " $x=1$ " $x = 2$ [$\ln \frac{e^2+1}{e}$, largo]

$y = e^x$ " $x = 0$ " $x = 1$

$y = \ln \sec x$ " $x = 0$ " $x = \frac{\pi}{3}$ [precioso]

1. $\int (x^3 + 5x^2)\,dx$
2. $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{x^5}\right) dx$
3. $\int (5x+3)^4\,dx$
4. $\int \frac{1}{(7x-4)^3}\,dx$
5. $\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen} x\,dx$
6. $\int \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x\,dx$
7. $\int e^x\,dx$
8. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$
9. $\int \cos x\, a^{\operatorname{sen} x}\,dx$
10. $\int \frac{1}{x}\,dx$
11. $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$
12. $\int \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}\,dx$
13. $\int \operatorname{tg} x\,dx$
14. $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$
15. $\int \frac{x^5+4x^3}{6x^4+x^6}\,dx$
16. $\int \operatorname{sen}(27x^3) \cdot x^2\,dx$
17. $\int \sec^2 5x \cdot dx$
18. $\int \left(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\right) \cos x\,dx$
19. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$
20. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
21. $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$
22. $\int \frac{x}{1+16x^4}\,dx$
23. $\int \frac{1}{3+x^2}\,dx$
24. $\int \frac{4}{5+2x^2}$
25. $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$
26. $\int x \ln x\,dx$
27. $\int x e^x\,dx$
28. $\int x^2 e^x\,dx$
29. $\int \ln x\,dx$
30. $\int x^2 \ln x\,dx$
31. $\int x \operatorname{sen} x\,dx$
32. $\int x^3 \cos x\,dx$
33. $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$
34. $\int e^{2x} \cos x\,dx$
35. $\int e^{5x} \operatorname{sen} 7x\,dx$
36. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$
37. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+3}$
38. $\int \frac{1}{x^2-4x+3}$
39. $\int \frac{1}{x^3+x^2-2x}\,dx$
40. $\int \frac{1}{x^3+x^2}$
41. $\int \frac{1}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx$
42. $\int \frac{1+2x}{x^2+2x+5}\,dx$
43. $\int \frac{2x^2+11}{(x^2-4x+8)(x+3)}\,dx$
44. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx$
45. $\int \frac{Ax+B}{C+Dx^2}\,dx$

Fecha: V.5.5.1989 Tiempo: 1h

1. Definir la función área y demostrar que es continua.

2. $$\int \frac{x^3 + x^2}{x^3 - x^2}\, dx$$

3. $$\int \frac{x+1}{x^2+6x+11}\, dx$$

4. $$\int tg\, x \, sen^2 x \, dx$$

5. Area det. por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$

2 p.a.u

Subir nota

1. $$\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}\, dx$$

2. $$\int_0^1 x \ln x \, dx$$

3. Dem. integrando por partes que

$$\int \frac{sen^n x}{cos^m x}\, dx = \frac{1}{m-1} \frac{sen^{n+1} x}{cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{sen^{n-2} x}{cos^{m-2} x}\, dx$$

23) $\int 3\,dx$ 24) $\int (x^3+2x^2-1)\,dx$ 24) $\int (\sqrt[7]{x^5}+\sqrt{x})\,dx$ 25) $\int \left(\frac{3}{x}+\operatorname{sen} x-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

26) $\int x^2 \operatorname{sen} x^3\,dx$ 27) $\int (x+1)\,e^{x^2+2x}\,dx$ 28) $\int \frac{3x^5+5x^4}{x^6+2x^5}\,dx$ 29) $\int \frac{7}{x-4}\,dx$

30) $\int \operatorname{tg} x\,dx$ 31) $\int \frac{1+x}{x^2+2x}\,dx$ 32) $\int (\operatorname{sen} \cos x)\operatorname{sen} x\,dx$ 33) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

34) $\int x e^x\,dx$ 35) $\int x \ln x\,dx$ 36) $\int x^3 e^x\,dx$ 37) $\int x \operatorname{sen} 2x\,dx$ 38) $\int \operatorname{arctg} x$

39) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\,dx$ 40) $\int_1^e \ln x\,dx$ 41) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$ 42) $\int \frac{dx}{x^2-x}$

43) $\int \frac{dx}{x^3-3x^2}$ 44) $\int \frac{1}{2+x^2}\,dx$ 45) $\int \frac{3}{5+2x^2}\,dx$ 46) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$

47) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+3}\,dx$ 48) $\int \frac{x-1}{x^2-6x+10}\,dx$ 49) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}\,dx$

50) Descomponer en fracciones simples, sin calcular los coeficientes, las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{1}{(x^2-1)(x^2-4x+3)(x^2+1)} \qquad g(x)=\frac{1}{(x-2)(2x-3)(x+1)}$$ (cuidado con el coef. de x^3)

$$h(x)=\frac{1}{x^3(x-1)^2(x^2-1)} \qquad p(x)=\frac{1}{(x^2-2x+3)(x+3)(x^3+3x^2+3x+1)}$$