Cálculo de probabilidades

0. Repaso

0.1 Conjuntos

Definiciones
Partes de un conjunto
Operaciones con conjuntos

0.2 Combinatoria

Variaciones
Permutaciones
Combinaciones

1. Espacios probabilísticos

1.1 Conceptos básicos

Experimento aleatorio
Espacio muestral
Suceso elemental
Suceso

1.2 Operaciones con sucesos

Unión
Intersección
Contrario
Suceso imposible
Suceso seguro
Diferencia
Sucesos incompatibles

1.3 Frecuencias

Definición
Propiedades

1.4 Definición de espacio probabilístico

Idea intuitiva
Definición
Propiedades
Ley de Laplace

2. Probabilidad condicionada

2.1 Sucesos condicionados

Definición

2.2 Sucesos dependientes e independientes

Definición
Consecuencias

2.3 Teorema de la probabilidad total

2.4 Teorema de Bayes

CALCULO DE PROBABILIDADES

0. REPASO

0.1 Conjuntos

Definición

Conjunto es la consideración en un todo de distintos entes.

Los entes pueden, en principio, tener cualquier naturaleza.

Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas, de cualquier alfabeto: $H, \mathcal{H}, \Omega$

Los entes que constituyen un conjunto se llaman elementos de ese conjunto. Se nombran con letras minúsculas: $h, \alpha, z, \theta \ldots$

Si "a" pertenece a "A" se escribe $a \in A$

Si "a" no pertenece a "A" se escribe $a \notin A$.

Un conjunto se puede definir por

- Extensión, nombrando todos sus elementos y por
- Comprensión, diciendo una característica que sólo sea cumplida por sus elementos.

Cardinal de un conjunto es el número de elementos que tiene. Se escribe así: card (A) o así: #(A). Ejemplo: $card(\emptyset) = 0$

Partes de un conjunto

Dados dos conjuntos A y M se dice que A es una parte de M, o que A es un subconjunto de M o que M es un superconjunto de A cuando todos los elementos de A pertecen a M. Se escribe $A \subset M$
(Se lee: A contenido en M)

$$\boxed{A \subset M \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in M}$$

El conjunto de todas las partes de M se designa $\mathcal{P}(M)$

Por tanto $\mathcal{P}(M)$ está formado por todos los subconjuntos de M

$$\boxed{\mathcal{P}(M) = \{ A \mid A \subset M \}} \qquad \boxed{A \in \mathcal{P}(M) \Leftrightarrow A \subset M}$$

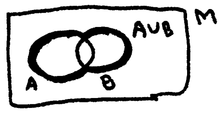
Se sabe que $\operatorname{card}(M) = n \Rightarrow \operatorname{card}(\mathcal{P}(M)) = 2^n$

Operaciones en $\mathcal{P}(M)$

Sean $A, B \in \mathcal{P}(M)$; $\quad A = B \Leftrightarrow [A \subset B \wedge B \subset A]$

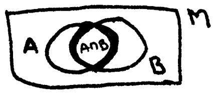
Unión de A y B es el conjunto de elementos que están en A o en B

$$\boxed{A \cup B = \{ x \in M \mid x \in A \vee x \in B \}}$$



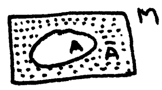
Intersección de A y B es el conjunto de elementos que están en A y en B

$$\boxed{A \cap B = \{ x \in M \mid x \in A \wedge x \in B \}}$$



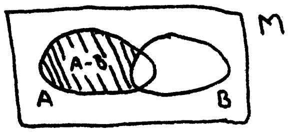
Complementario de A en M es el conjunto de elementos que no están en A

$$\boxed{\overline{A} = \{ x \in M \mid x \notin A \}}$$



Diferencia de A y B es el conjunto de elementos que están en A pero no en B

$$\boxed{A - B = A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}}$$



$(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, {}^{-})$ se dice que es el "álgebra de Boole" de las partes de M por las propiedades que cumple. M se llama conjunto universal.

0.2 Combinatoria

Variaciones

Si de m elementos tenemos que elegir n sin repetir ninguno, importando tanto los elementos que se elijen como el orden en que se toman, hay que considerar "variaciones sin repetición de m elementos tomados n a n". Obviamente, debe ser $m \geq n$

$$\boxed{V_{m,n} = V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}$$

Ejemplo: $V_{8,3} = V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Si de m elementos hay que elejir n, pudiendo repetir cualquiera, importando tanto el orden como los elementos, se está ante "variaciones con repetición de m elementos tomados n a n". Ahora puede ser $m < n$.

$$\boxed{VR_{m,n} = VR_m^n = m^n}$$

Ejemplo: $VR_{8,3} = VR_8^3 = 8^3 = 512$

Permutaciones

El número de formas en que se pueden colocar n elementos distintos es "permutaciones de n elementos", siempre que la colocación sea en fila.

$$\boxed{P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

Ejemplo: $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

El número de formas en que pueden ser colocados en fila n elementos de los que n_1 son iguales entre sí, n_2 son iguales entre sí, ..., y n_k son iguales entre sí es "permutaciones de n elementos estando repetidos $n_1, n_2, \ldots, n_k$". Es claro que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k \leq n$

$$\boxed{P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}}$$

Ejemplos: $P_8^3 = \frac{8!}{3!} = 6720$; $P_8^{3,3,2} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = 560$

Combinaciones

Si de m elementos distintos hay que elegir n sin poder repetir y sin que importe el orden, hay que considerar "combinaciones sin repetición de m elementos tomados n a n".

$$\boxed{C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}}$$

Ejemplo: $C_{8,3} = C_8^3 = \frac{V_8^3}{P_3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$

Si de m elementos distintos hay que elegir n sin que importe el orden y pudiendo repetir los elementos elegidos, se consideran "combinaciones con repetición de m elementos tomados n a n".

$$\boxed{CR_{m,n} = CR_m^n = C_{m+n-1,n}}$$

Ejemplo: $CR_{8,3} = CR_8^3 = C_{10,3} = 120$

1. ESPACIOS PROBABILISTICOS

1.1. Conceptos básicos

* Experimento aleatorio (o experimento estocástico, o prueba) es un procedimiento o método para seleccionar un elemento de un conjunto M, de modo que a priori no sea posible saber cuál va a ser el seleccionado.

* Espacio muestral del experimento aleatorio: el conjunto M

* Suceso elemental: cualquier elemento de M

* Suceso: cualquier subconjunto de M

Se dice que "se ha verificado el suceso A" cuando al realizar la prueba se ha obtenido un elemento de A.

1.2. Operaciones con sucesos

Sea E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y $A, B \in P(M)$ dos sucesos cualesquiera.

El suceso unión de A y B viene definido por el conjunto $A \cup B$ y es aquel que se verifica cuando el resultado de la prueba es un elemento de A o de B

El suceso intersección de A y B viene definido por el conjunto $A \cap B$ y se verifica sólo cuando el resultado de la prueba es un elemento que pertenece a A y a B.

El suceso contrario de A es el que se verifica cuando no se verifica A. Está definido por el conjunto $\overline{A}$

Suceso imposible: el que nunca se verifica. Su conjunto asociado es el $\emptyset$

Suceso seguro: el que se verifica siempre. Su conjunto es M

Las propiedades que cumple $(P(M), \cap, \cup, {}^{-})$ nos hacen decir que es el "Algebra de Boole" de los sucesos asociados al experimento aleatorio E. Estas propiedades son idénticas a las que cumplen los conjuntos.

El suceso diferencia de A y B es el que se verifica cuando el resultado de E es un elemento de A que no está en B. El conjunto que lo representa es $A - B$

Dos sucesos son incompatibles cuando no se pueden verificar simultáneamente, es decir: $A \cap B = \emptyset$

1.3 Frecuencias

Definición

Sean E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y $A \in P(M)$ un suceso.

Supongamos que efectuamos n veces el experimento E y en m ocasiones se verifica el suceso A.

* Frecuencia absoluta de A: el número m. Se escribe $F(A) = m$

* Frecuencia relativa de A: el número $\frac{m}{n}$. Se escribe $f(A) = \frac{m}{n}$

Obsérvese que $f(A) = \frac{F(A)}{n}$

Propiedades

Sean $A, B \in P(M)$

1a. $0 \leq F(A) \leq n$

2a. $F(\bar{A}) = n - F(A)$

3a. $A \subset B \Rightarrow F(A) \leq F(B)$

4a. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow F(A \cup B) = F(A) + F(B)$

5a. $F(M) = n$

6a. $F(A \cup B) = F(A) + F(B) - F(A \cap B)$

Estas propiedades de las frecuencias absolutas son evidentes. Dividiendo cada igualdad por n se obtienen las propiedades correspondientes de las frecuencias relativas:

1. $0 \leq f(A) \leq 1$
2. $f(\bar{A}) = 1 - f(A)$
3. $A \subset B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$
4. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A \cup B) = f(A) + f(B)$
5. $f(M) = 1$
6. $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$

1.4 Definición de espacio probabilístico

Idea intuitiva

Si E es un experimento aleatorio con muestral M, se desea asociar a cada suceso un número, que llameremos probabilidad de ese suceso $(p(A))$ y que coincida con el valor que parece tomar $f(A)$ cuando n es muy alto, es decir, que deseamos que se verifique

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} f(A) \qquad [\text{Ley de los grandes números}]$$

Además se quiere que las probabilidades tengan las propiedades que ya tenían las frecuencias relativas.

Si se consigue definir esa "probabilidad" p, el par (M,p) se llamará "espacio probabilístico".

Definición

Sean M un conjunto y $p : \mathcal{P}(M) \longrightarrow [0,1]$ una aplicación.

1. Se dice que p es una probabilidad cuando

   a) $p(M) = 1$

   b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(M) \mid A \cap B = \emptyset : \ p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

2. Se dice que el par (M, p) es un espacio probabilístico cuando p es una probabilidad

Propiedades

Sea (M,p) un espacio probabilístico.

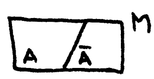
1 $\boxed{p(\emptyset) = 0}$

$$M \cap \emptyset = \emptyset \overset{(b)}{\Longrightarrow} p(M \cup \emptyset) = p(M) + p(\emptyset) \Rightarrow p(M) = p(M) + p(\emptyset) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\emptyset) = 0$$

2 $\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(M) : \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)}$

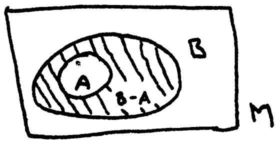
Sabemos que $A \cup \bar{A} = M$ y $A \cap \bar{A} = \emptyset$



$$A \cap \bar{A} = \emptyset \overset{(b)}{\Longrightarrow} p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) \Rightarrow p(M) = p(A) + p(\bar{A}) \overset{(a)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(a)}{\Longrightarrow} 1 = p(A) + p(\bar{A}) \Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

3 $\boxed{\forall A, B \in \mathcal{P}(M) \mid A \subset B : \; p(A) \leq p(B)}$

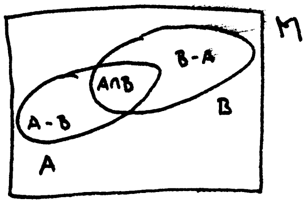


Partimos de que $B = (B-A) \cup A$ y $(B-A) \cap A = \emptyset$

$(B-A) \cap A = \emptyset \overset{(b)}{\Rightarrow} p((B-A) \cup A) = p(B-A) + p(A) \Rightarrow p(B) = p(B-A) + p(A)$

Por ser $p(B-A) \in [0,1]$, queda $p(A) \leq p(B)$

4 $\boxed{\forall A, B \in \mathcal{P}(M) : \; p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$



Sabemos que $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$

y $(A-B) \cap (A \cap B) \cap (B-A) = \emptyset$

$p(A) = p(A-B) + p(A \cap B) \Rightarrow p(A-B) = p(A) - p(A \cap B)$

$p(B) = p(B-A) + p(A \cap B) \Rightarrow p(B-A) = p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B) = p(A-B) + p(A \cap B) + p(B-A) = p(A) - p(A \cap B) + p(A \cap B) +$

$+ p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Ley de Laplace

Sea (M, p) un espacio probabilístico finito (e.d.: M es un conjunto finito) y equiprobable (e.d.: la probabilidad de todos los sucesos elementales o elementos de M es la misma). Entonces

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(M) : \; p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(M)}}$$

A nivel elemental esto se enuncia así: $p(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles.}}$

Demostración

Como es M finito, numeramos sus elementos: $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$

Es claro que $M = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_s\}$ y $\{a_1\} \cap \{a_2\} = \emptyset$, $\{a_1\} \cap \{a_3\} = \emptyset$, $\{a_1\} \cap \{a_s\} = \emptyset, \ldots, \{a_{s-1}\} \cap \{a_s\} = \emptyset$ (se dice que los conjuntos $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_s\}$ son disjuntos dos a dos.)

Por tanto $p(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_s\}) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + \dots + p(\{a_s\})$

Como es espacio es equiprobable, $p(\{a_1\}) = p(\{a_2\}) = \dots = p(\{a_s\})$

Luego $p(M) = p(\{a_i\}) + p(\{a_i\}) + \overset{(s}{\dots} + p(\{a_i\}) \quad (\forall i = 1, 2, \dots, s) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = s \cdot p(\{a_i\}) \; (\forall i = 1, 2, \dots, s) \Rightarrow \quad p(\{a_i\}) = \frac{1}{s} \quad \forall i = 1, \dots, s$

Como $A \in P(M)$, será $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$

$A = \{a_{i_1}\} \cup \{a_{i_2}\} \cup \dots \cup \{a_{i_r}\} \Rightarrow p(A) = p(\{a_{i_1}\}) + p(\{a_{i_2}\}) + \dots + p(\{a_{i_r}\}) =$

$\Rightarrow p(A) = r \cdot p(\{a_i\}) = r \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow p(A) = \frac{r}{s} \Rightarrow p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(M)}$

2. PROBABILIDAD CONDICIONADA

2.1 Sucesos condicionados

Sea E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y A y B dos sucesos. Llamamos n al número de veces que se realiza la prueba E

Se llama suceso "A condicionado a B" (se escribe A/B) al suceso que sólo se verifica cuando, habiéndose verificado B, tambien se verifica A.

Frecuencia absoluta de A/B es el número $F(A/B)$, número de veces que se verifique el suceso A/B.

Frecuencia relativa de A condicionado a que B se ha verificado es el número $f_B(A) = f(A/B)$ definido como $f(A/B) = \frac{F(A/B)}{F(B)}$

Pero el número de veces que se verifica A cuando ya se ha verificado B, es decir, $F(A/B)$, es precisamente el número de veces que se verifica $A \cap B$, o sea, $F(A \cap B)$, con lo que

$$f(A/B) = \frac{F(A \cap B)}{F(B)} \; ; \quad \text{dividiendo por } n: \quad f(A/B) = \frac{\frac{F(A \cap B)}{n}}{\frac{F(B)}{n}} = \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$$

Definición

Sea (M, p) un espacio probabilístico y $B \in \mathcal{P}(M)$ un suceso tal que $p(B) \neq 0$

"Probabilidad condicionada a B" es la aplicación $p_B : \mathcal{P}(M) \to [0,1]$
$A \to p_B(A)$

definida por $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$; pero $p_B(A) = p(A/B)$, con

lo que $\boxed{p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}}$

2.2. Sucesos dependientes e independientes

En general la probabilidad de que se verifique el suceso A $(p(A))$ no es la misma que la probabilidad de que se verifique sabiendo de antemano que el suceso B se ha verificado $(p(A/B))$, es decir, en general $p(A) \neq p(A/B)$.

Pero cuando el hecho de saber que B se ha verificado no aporta ninguna información sobre si A se verifica o no, entonces $p(A) = p(A/B)$, y esto sucede muy a menudo.

Definición

Sea E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y $A, B \in \mathcal{P}(M)$ dos sucesos.

1. Se dice que A y B son dependientes cuando $p(A) \neq p(A/B)$
2. Se dice que A y B son independientes cuando $p(A) = p(A/B)$

Consecuencias

1 $\boxed{A \text{ y } B \text{ dependientes} \Rightarrow p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) = p(A) \cdot p(B/A)}$

2 $\boxed{A \text{ y } B \text{ independientes} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$

Demostración

1. Esta propiedad se verifica siempre, pero sólo se usa cuando los sucesos son dependientes

$$\left.\begin{array}{l} p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) \\[2ex] p(B/A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)} \Rightarrow p(B \cap A) = p(A) \cdot p(B/A) \end{array}\right\} \text{ c.q.d.}$$

2. Por la parte (1), $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$

Por ser A y B independientes, $p(A/B) = p(A)$

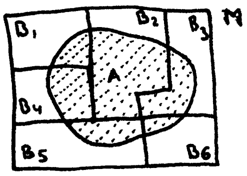
Luego $P(A \cap B) = p(B) \cdot P(A)$, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, c.q.d.

2.3 Teorema de la probabilidad total

Sea E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y $A, B_1, B_2, \ldots, B_K \in P(M)$ sucesos que verifiquen que $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_K = M$ y los conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_K$ son disjuntos dos a dos. Entonces

$$\boxed{p(A) = \sum_{i=1}^{K} p(B_i) \cdot p(A/B_i)}$$

Demostración



$$p(A) = p\left((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_K)\right) =$$

$$= p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \ldots + p(A \cap B_K) =$$

$$= \sum_{i=1}^{K} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{K} p(B_i) \cdot p(A/B_i) \text{ , c.q.d.}$$

2.4 Teorema de Bayes

Sea E un experimento aleatorio, M su espacio muestral y $A, B_1, B_2, \ldots, B_K \in P(M)$ sucesos que verifiquen que $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_K = M$ y los conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_K$ son disjuntos dos a dos. Entonces $\forall j = 1, \ldots, K$: $\boxed{p(B_j/A) = \dfrac{p(B_j) \cdot p(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{K} p(B_i) \cdot p(A/B_i)}}$

Demostración

$$p(B_j/A) = \frac{p(B_j \cap A)}{p(A)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tma. prob. total}}}{=} \frac{p(B_j) \cdot p(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{K} p(B_i) \cdot p(A/B_i)} \text{ , c.q.d.}$$

2.5 Pruebas con reemplazamiento

Sean E un experimento aleatorio, M su espacio muestral, (M, p) un espacio probabilístico y $A \in \mathcal{P}(M)$ un suceso cualquiera.

Consideramos el experimento aleatorio E_n consistente en repetir E n veces. Su espacio muestral es $M \times M \times \overset{(n}{\cdots} \times M$ y en él hay definida también una probabilidad que llamemos asimismo p

Respecto al experimento E_n consideramos los siguientes sucesos:

A^K : "Al repetir E n veces, el suceso A se ha verificado exactamente K veces"

A_i : "En la i-ésima repetición de E se ha verificado el suceso A"

Nuestra intención es calcular $p(A^K)$ en función de $p(A)$

Una posibilidad de que se verifique A^K es que se verifique el suceso

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_K \cap \bar{A}_{K+1} \cap \bar{A}_{K+2} \cap \ldots \cap \bar{A}_n$$

Como lo que ocurre en una prueba de E no influye de ninguna forma para las siguientes, los sucesos que aparecen en esa intersección son independientes, con lo que $p(A_1 \cap \ldots \cap A_K \cap \bar{A}_{K+1} \cap \ldots \cap \bar{A}_n) = p(A_1) \cdot \ldots \cdot p(A_K) \cdot p(\bar{A}_{K+1}) \cdot \ldots p(\bar{A}_n) =$

$$= p(A) \cdot \overset{(K}{\cdots} \cdot p(A) \cdot p(\bar{A}) \cdot \overset{(n-K}{\cdots} \cdot p(\bar{A}) = (p(A))^K \cdot (p(\bar{A}))^{n-K} = (p(A))^K \cdot (1 - p(A))^{n-K}$$

Cualquier otra posibilidad de que se verifique A^K consiste en una permutación del orden de aparición de A y $\bar{A}$. El total de posibilidades es $P_n^{K,n-K}$, pero ocurre que $P_n^{K,n-K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} = \binom{n}{K}$. Es obvio que cualquiera de esas posibilidades tiene la misma probabilidad que la que hemos escrito al principio, es decir: $(p(A))^K \cdot (1-p(A))^{n-K}$

A^K es el suceso unión de todas esas posibilidades, las cuales son incompatibles (si ocurre una, no puede ocurrir ninguna otra en el mismo experimento E_n), luego $p(A^K)$ es la suma de todas esas probabilidades iguales.

Por tanto,

$$\boxed{p(A^K) = \binom{n}{K} (p(A))^K \cdot (1 - p(A))^{n-K}}$$