Geometría

1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$

Producto escalar

Se llama producto escalar a cualquier aplicación

$$\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}$$ que sea

1. Simétrica
2. Bilineal
3. Definida positiva
4. No degenerada

E. v. euclídeo

Es un e. v. en el que hay definido un p.e.

P.e. usual

Es la aplicación $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Proposición

El p.e.u. es un p.e., luego $\mathbb{R}^3$ es un e.v.e.

Demostración

(...)

Ortogonalidad

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ se dice que son ortogonales o perpendiculares cuando $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Se escribe $\vec{a} \perp \vec{b}$

Problema práctico

Dado un vector, encontrar rápidamente un vector perpendicular a él.

Módulo de un vector

Módulo o norma de $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ es $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Con el p.e.u. : $|(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Se dice que $\vec{a}$ es unitario cuando $|\vec{a}| = 1$

Proporcionalidad

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ se dice que son proporcionales, o que uno es múltiplo del otro, cuando

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Obsérvese que si son proporcionales son l. d. y viceversa

Problema práctico

Dados dos vectores no nulos, averiguar rápidamente si son pr. o no.
Si uno tiene una componente cero el otro también la debe tener y
las no nulas deben ser proporcionales

Proposición

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \ |\lambda \vec{a}| = |\lambda| \, |\vec{a}|$

Demostración

(...)

Normalización de un vector

Es encontrar otro, múltiplo suyo, que sea unitario.
Para conseguirlo basta dividir el vector por su norma: (...)

Angulo entre dos vectores

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

Lema: $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \in [-1, 1]$

Definición: $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \arccos \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \in [0, \pi]$

Consecuencia: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a},\vec{b})$

Observación: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$

2. Bases de un espacio euclídeo

Sistema ortogonal $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\} \subset V$ es un s.o. $\Leftrightarrow \forall i \neq j : \vec{u}_i \perp \vec{u}_j$

Bases ortogonales y ortonormales

1. Una base es ortogonal cuando es un s.o.

2. Una base es ortonormal cuando es ortogonal y sus vectores son unitarios.

Prop. sist. ortog. $\Rightarrow$ sist. libre

Condición de independencia de tres vectores

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ libre} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Demostración

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ libre} \Leftrightarrow [\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0]$$

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Leftrightarrow [S] \left\{ \begin{array}{l} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = 0 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0 \end{array} \right. \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ libre} \Leftrightarrow [S] \text{ sólo tiene sol. trivial} \Leftrightarrow \operatorname{rg}(C) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |C| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ejemplos

a) Usuales

b) Dem. $\mathcal{B}$ base

(E) ¿ Cómo encontrar con rapidez un vector perpendicular a otros dos ?

Producto vectorial

Se busca definir una aplicación

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \vec{a} \times \vec{b}$$ que verifique

1. Bilineal
2. Antisimétrica $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
3. $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u} \quad \wedge \quad \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$

Si llamamos $C_3 = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$, es fácil demostrar que la aplicación

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ verifica las tres propiedades

A esta aplicación se le llama producto vectorial.

Se cumple $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{sen}(\vec{a}, \vec{b})$

Obtención de bases ortonormales

$\vec{a} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\} \longrightarrow \vec{b} \perp \vec{a} \longrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b} \longrightarrow$

$\longrightarrow \{ \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \}$ ortogonal $\longrightarrow$ Normalizar.

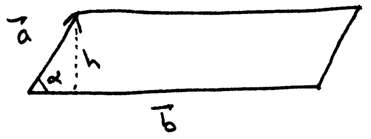
Producto mixto

$$(\bar a,\bar b,\bar c) = \bar a\cdot(\bar b\times\bar c)$$

Si $\bar a=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar b = \dots$, entonces $(\bar a,\bar b,\bar c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

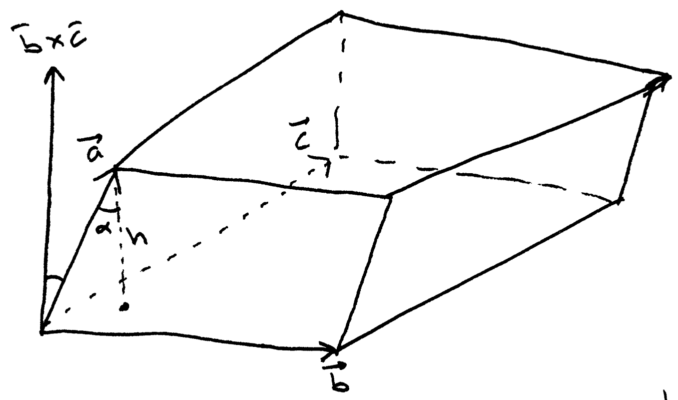
Demostración (...)

Área de un paralelogramo



$$S = \text{base}\times h = |\bar b|\cdot h = |\bar b|\,|\bar a| \operatorname{sen}\alpha = |\bar a\times\bar b|$$

Volumen de un paralelepípedo



$$\text{Volumen} = h\cdot(\text{área de la base}) =$$

$$= |\vec a|\cos\alpha\,|\bar b\times\bar c| =$$

$$= |\bar a|\cdot\left|\cos\measuredangle(\bar a,\bar b\times\bar c)\right|\cdot|\bar b\times\bar c| =$$

$$= \left|\,|\bar a|\cdot|\bar b\times\bar c|\cdot\cos\measuredangle(\bar a,\bar b\times\bar c)\right| =$$

$$= |\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)| = |(\bar a,\bar b,\bar c)|$$

Observación

$$\{\bar a,\bar b,\bar c\} \text{ libre} \iff \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \neq 0 \iff (\bar a,\bar b,\bar c)\neq 0 \iff \text{Volumen}\neq 0$$

Volumen de un tetraedro

$$V = \frac{1}{6}\,|(\bar a,\bar b,\bar c)|$$

3. Variedades lineales

Ⓔ Subestructuras (¡fractales!)

Son subc. de $\mathbb{R}^3$ que tiene estructura de e.v. : subespacios vectoriales

Rectas vectoriales

R.v. es una recta que pasa por el origen. También se llama variedad lineal de dim. 1

$\vec{v} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\} \Rightarrow L[\vec{v}] = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ es la recta vectorial generada por $\vec{v}$, que se llama v. d. de la recta.

Ecuaciones de la r.v.

Sean $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$, $\vec{w} = (x, y, z) \in L[\vec{v}]$

$$\vec{w} = \lambda\vec{v} \quad (\text{Ec. vectorial}) \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda v_1 \\ y = \lambda v_2 \\ z = \lambda v_3 \end{cases} \quad (\text{Ecs. paramétricas}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{v_1} = \frac{y}{v_2} = \frac{z}{v_3} \quad (\text{Ec. continua}) \Rightarrow \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases} \quad (\text{Ecs. impl.})$$

Proposición

$$L[v] = L[\alpha\vec{v}]$$

Planos vectoriales

P.v. es un plano que pasa por el origen. También se llaman v.l. de dimensión 2.

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ l.i.

$L[\vec{u}, \vec{v}] = \{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$ es el p.v. generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Proposición

$L[\vec{u}, \vec{v}] = L[\alpha \vec{u}, \beta \vec{v}]$

Ecuaciones del p.v.

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ l.i. y $\vec{w} = (x, y, z) \in L[\vec{u}, \vec{v}]$

$\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ (Ec. vectorial) $\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$ (Ecs. paramétricas) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad ax + by + cz = 0$ (Ec. implícita o general.)

4. El espacio afín $\mathbb{R}^3$

E Vectores, puntos, vectores asociados

Definición de espacio afín

Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto y $(V, +, \cdot)$ un e.v.

Se dice que $(A, +)$ es un espacio afín con e.v. asociado $(V, +, \cdot)$

cuando $+ : A \times V \to A$
$(P, \vec{v}) \to P + \vec{v}$ es una aplicación que verifica:

1. $\forall P \in A \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V : (P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$

2. $P + \vec{v} = P \iff \vec{v} = \vec{0}$

3. $\forall P, Q \in A \ \exists \vec{v} \in V \mid P + \vec{v} = Q$

Llamaremos puntos a los elementos de A

Propiedades

I. $\forall P, Q \in A \ \exists! \vec{v} \in V \mid P + \vec{v} = Q$.

Por tanto podemos llamar $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ y $\boxed{P + \overrightarrow{PQ} = Q}$

II. $\forall P, Q, R \in A : \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

III. $\forall P, Q \in A : \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Demostración

I. Por (3) $\exists \vec{v}$

Sup. $\exists \vec{u}, \vec{v} \in V \mid P + \vec{u} = Q \wedge P + \vec{v} = Q$

$$P + (\vec u + (-\vec v)) \overset{1}{=} (P+\vec u) + (-\vec v) = Q + (-\vec v) =$$

$$= (P+\vec v) + (-\vec v) \overset{1}{=} P + (\vec v + (-\vec v)) = P + \vec 0 \overset{2}{=} P \Rightarrow$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} u + (-\vec v) = \vec 0 \Rightarrow \vec u = \vec v$$

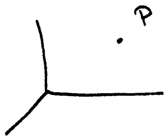
II $\quad P + (\vec{PQ} + \vec{QR}) = \dots = R \Rightarrow \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

III. $\quad P + (\vec{PQ} + \vec{QP}) = \dots = P \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{PQ} = -\vec{QP}$

Mejor: $\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \vec 0 \Rightarrow \vec{PQ} = -\vec{QP}$

Definición

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$, como conj. de puntos.



Denotaremos sus elementos con mayúsculas

Traslación

Siendo $\vec v \in \mathbb{R}^3$, se llama "traslación de vector $\vec v$" a la aplicación

$\tau_{\vec v} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\tau_{\vec v}(p_1, p_2, p_3) = (p_1 + v_1, \dots)$

Notación: $\tau_{\vec v}(P) = P + \vec v$

Teorema

Definiendo $+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(P, v) \longrightarrow P + v \;\; (= \tau_{\vec v}(P))$ se verifica

que $(\mathbb{R}^3, +)$ es un e.a. con e.v.a. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

Demostración

(...)

Ejercicios

Hallar vértices de figuras ...

Esp. afín euclídeo

Un espacio afín se dice que es euclídeo cuando su espacio vectorial asociado lo es. Por tanto $(\mathbb{R}^3, +)$ es un esp. afín euclídeo.

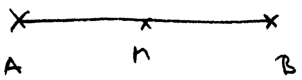
Distancia entre dos puntos

$\forall\ P, Q \in A$ se define $d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|$

En el caso usual

$$d((p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3)) = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$$

Punto medio de un segmento



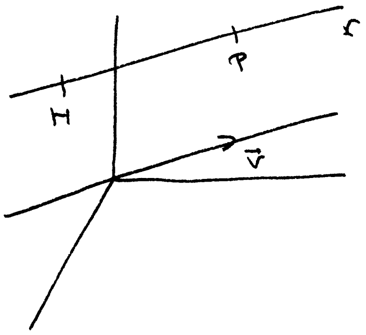
$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

5. Variedades afines

Son subconj. de un espacio afín que también tienen estructura de e.a.

Las variedades afines de $\mathbb{R}^3$ son las rectas y los planos, que a veces son llamados rectas afines y planos afines

Ecuaciones de la recta



Sea r una recta que pasa por $H = (h_1, h_2, h_3)$

Hay una recta vectorial paralela a ella, que tendrá v. d. $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, al que llamaremos vector director de r ($\vec{v}_r$)

r es la traslación de la recta vectorial mediante el vector $\overrightarrow{OH}$

$$P \in r \iff \begin{cases} \overrightarrow{HP} = \lambda \vec{v} \\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \lambda \vec{v} \\ P = H + \lambda \vec{v} \end{cases} \quad \text{(Ec. vectorial)} \Rightarrow \begin{cases} x = h_1 + \lambda v_1 \\ y = h_2 + \lambda v_2 \\ z = h_3 + \lambda v_3 \end{cases} \quad \text{(Ecs. paramétricas)}$$

Despejando λ: $\dfrac{x-h_1}{v_1} = \dfrac{y-h_2}{v_2} = \dfrac{z-h_3}{v_3}$ (Ec. continua). $\Rightarrow$

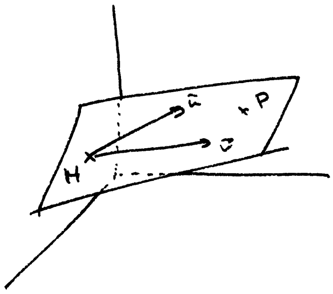
$$\Rightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{(Ecs. implícitas)}$$

Ejemplo

[Poner algún 0 en $\vec{v}$]

GM13

Ecuaciones del plano



Sea π un plano que pasa por $H = (h_1, h_2, h_3)$.

Hay un plano vectorial paralelo a él que estará generado por dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, que llamaremos (" , ") generadores de π.

π es la traslación del plano vectorial mediante $\overline{OH}$

$$P \in \pi \iff \begin{cases} \overrightarrow{HP} = \lambda \bar{u} + \mu \bar{v} \\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \lambda \bar{u} + \mu \bar{v} \quad \text{(Ec. vectorial)} \\ P = H + \lambda \bar{u} + \mu \bar{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = h_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = h_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \quad \text{(Ecs. param.)} \\ z = h_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Quitando los parámetros : $ax + by + cz + d = 0$ (Ec. implícita o general)

También se puede obtener ésta así :

$$\overrightarrow{HP} = \lambda \bar{u} + \mu \bar{v} \Rightarrow \overrightarrow{HP}, \bar{u}, \bar{v} \text{ l. dep.} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-h_1 & y-h_2 & z-h_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo

[Poner O a $\bar{u}$ y $\bar{v}$]

Vector normal a un plano

Diremos que un vector es normal o perpendicular a un plano cuando es perpendicular a todos los vectores que lo generan.

Sea $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ un plano y $P=(p_1,p_2,p_3)$, $Q=(q_1,q_2,q_3) \in \pi$

$$\left.\begin{array}{l} ap_1+bp_2+cp_3+d=0 \\ aq_1+bq_2+cq_3+d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow (a,b,c) \perp \overline{QP} \Rightarrow (a,b,c) \perp \pi$$

A un vector normal a π le llamaremos $\vec{n}_\pi$

Consecuencias

1. Calcular la ec. gen. de un plano que pase por un punto conocido un vector normal.
2. Id. conocidos dos vectores generadores
3. Dada la ec. gen. calcular vectores generadores

Casos particulares

1. Planos paralelos a los planos coordenados

   Si pasan por (x_0, y_0, z_0) son $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$

   (Por consecuencia 1)

2. Rectas paralelas a los ejes

   (Por intersección de planos)

Problema

Dada la ecuación de una v. afín, pedir puntos, v. s. y normales

Importante

$r \perp \pi \Rightarrow \vec{v_r} = \vec{n_\pi}$

Algunos tipos de problema

1. Recta que pasa por dos puntos
2. Plano que pasa por tres puntos
3. Plano en implícita a plano en paramétricas
4. Recta en implícitas a recta en paramétricas
5. Plano paralelo a otro que pase por un punto
6. Recta paralela a otra que pase por un punto
7. Posición relativa de dos planos
8. " " " " rectas
9. Plano perpendicular a una recta que pase por un punto
10. Recta " " un plano " " " " "
11. " " " una recta " " " " "
12. Simétrico de un punto respecto a un punto
13. Id. plano
14. Id. recta
15. Perpendicular común a dos rectas.

Posición relativa de dos planos (definición)

1. Paralelos
2. Secantes (caso particular, perpendiculares)
3. Coincidentes

Posición relativa de dos rectas (definición)

1. Paralelas
2. Secantes
3. Se cruzan
4. Coincidentes

Posición relativa de recta y plano (definición)

1. Paralelos
2. Secantes
3. Recta contenida en el plano

Ángulo entre dos rectas

Se define $\sphericalangle(r,s) = \sphericalangle(\vec{v_r}, \vec{v_s})$ y se suele tomar el menor de los dos posibles, que son suplementarios.

Ángulo entre dos planos

[Definirlo con dibujo]

Se calcula $\sphericalangle(\pi, \Sigma) = \sphericalangle(\vec{n_\pi}, \vec{n_\Sigma})$ y se ....

Ángulo entre recta y plano

[Definirlo con dibujo]

Se calcula $\measuredangle(\pi, r) = \left| \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\vec{n}_\pi, \vec{v}_r) \right|$

Pos. rel. de dos planos (est. geom.)

$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$, $\pi' \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0$

a) $(a, b, c) = \lambda(a', b', c') \Rightarrow$ coincidentes o paralelos

i) $d = \lambda d' \Rightarrow$ coincidentes

ii) $d \neq \lambda d' \Rightarrow$ paralelos

b) $(a, b, c) \neq \lambda(a', b', c')$ secantes

Pos. rel. de dos rectas (est. geom.)

Sean r una recta que pasa por A y tiene v. d. $\vec{u}$ y
s " " " " " B " " " $\vec{v}$

a) $\vec{u} = \lambda \vec{v} \Rightarrow$ paralelas o coincidentes

i) $A \in s \Rightarrow$ coincidentes

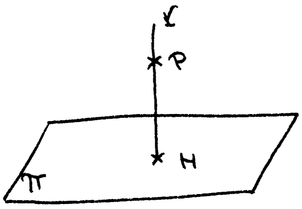
ii) $A \notin s \Rightarrow$ paralelas

b) $\vec{u} \neq \lambda \vec{v} \Rightarrow$ secantes o se cruzan

i) $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$ l. d. $\Rightarrow$ secantes

ii) $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$ l. i. $\Rightarrow$ se cruzan.

Distancia de un punto a un plano



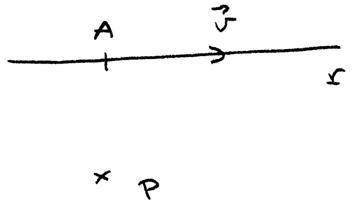
$P = (p_1, p_2, p_3)$, $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$

$r \equiv (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda (a, b, c) = (p_1 + \lambda a, \ldots$

$H \in \pi \Rightarrow a(p_1 + \lambda a) + \ldots = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-(ap_1 + bp_2 + cp_3 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}$

$$d(P, \pi) = d(P, H) = \ldots = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distancia de un punto a una recta



$$d(P, r) = d(P, \pi(A; \vec{v}, \vec{v} \times \overrightarrow{PA}))$$

GM - P1

S sist. $| \forall \vec{u}, \vec{v} \in S : \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow S$ libre

Distancia entre recta y plano //

plano paralelo

recta paralela

Posición relativa de recta y plano (geom.)

Recta que pase por un punto y corta a otras dos.

Decir 4 puntos que forman tetraedro regular

Dados los puntos $A = (1,2,-2)$, $B = (3,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z=0$, encontrar los puntos $C \in \pi \mid \widehat{ABC}$ es isósceles. ¿Qué figura geométrica forman? Discutir el sistema en general.

Hallar el centro y el radio de la circunferencia

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=5 \\ x-y=0 \end{cases}$$

Dem. sup. Δ det. por $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ es $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Matemáticas I   Curso de Orientación Universitaria   Curso 1991-92

Tipos de problemas.   ***Tema: Geometría.***   **Fecha: X.5.2.1992**

1. Recta que pasa por dos puntos.
2. Plano que pasa por tres puntos.
3. Plano en implícita a plano en paramétricas.
4. Recta en implícitas a recta en paramétricas.
5. Plano que pase por un punto y sea paralelo a otro plano.
6. Recta que pase por un punto y sea paralela a otra recta.
7. Posición relativa de dos planos.
8. Posición relativa de dos rectas.
9. Plano que pase por un punto y sea perpendicular a una recta.
10. Recta que pase por un punto y sea perpendicular a un plano.
11. Recta que pase por un punto y sea perpendicular a una recta.
12. Simétrico de un punto respecto a otro punto.
13. Simétrico de un punto respecto a un plano.
14. Simétrico de un punto respecto a una recta.
15. Recta perpendicular común a dos rectas.

2º PARCIAL

1. Sean los vectores de $\mathbb{R}^3$: $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,2,0)$, $(2,1,0)$, $(3,2,1)$, $(0,-1,2)$, $(5,3,4)$

   a) Hallar sus módulos

   b) ¿Cuántas parejas distintas se pueden considerar?

   c) Hallar los productos escalares de todas las parejas.

   d) Decir cuáles están formadas por vectores perpendiculares.

   e) Hallar los ángulos que forman cada pareja. (en grados y minutos sexagesimales)

2. a) Poner un ejemplo de base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que no sea ortonormal.
   b) Id. de base ortonormal que no sea C.

3. Calcular la ecuación vectorial de los siguientes planos de dos formas distintas.

   a) $3x + 2y - z = 0$ b) $x = 0$ c) $-y + 3z = 0$

4. Dar una base ortonormal en la que uno de los vectores sea múltiplo del $(1,1,1)$

5. Dar un vector perpendicular al plano $\begin{cases} x = -\mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases}$ y que tenga módulo 23

6. Hallar la recta perpendicular a los planos $3x+2y-z=0$ y $-y+3z=0$.

7. Ecuaciones del plano que pasa por los puntos $(-1,0,-1)$, $(3,4,0)$, $(-1,2,3)$

8. Dar las ecuaciones de dos rectas que estan contenidas en el plano anterior

9. Ecuación de un plano perpendicular a la recta $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -5+2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ y que pase por $(1,0,1)$

10. Ecuaciones del plano que contiene a las rectas $x=y=z$ y $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{4}$

Fecha: X. 20.4.1988 Tiempo: 1.5 h

2p. (1) Definición de espacio afín. Demostrar que si: P, Q y R son puntos de un espacio afín entonces $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

1p. (2) Estudiar la posición relativa de r y s

1p. (3) Hallar las ecuaciones de la paralela a r que pasa por A

1p. (4) Calcular el ángulo que forman π y Σ

2p. (5) Encontrar el simétrico de A respecto a π

1p. (6) Calcular el volumen del tetraedro determinado por A, B, C y D

2p. (7) Hallar las ecuaciones de la recta perpendicular común a t y w

Datos

$$r \equiv \begin{cases} x + z - 17 = 0 \\ x + y - z + 11 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 4x - z - 18 = 0 \\ y + 8 = 0 \end{cases} \qquad \pi \equiv 2y + 3z - 44 = 0$$

$$\Sigma \equiv (x, y, z) = (0,1,0) + \lambda (1,2,1) + \mu (1,3,-2) \qquad t \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$w \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad A = (1,1,1),\ B = (0,2,1),\ C = (6,1,-1),\ D = (2,3,4)$$

Elevar la calificación.

(1) Hallar cuatro puntos que formen un tetraedro de volumen dado V.

(2) Dados los puntos $A = (1, 2, -2)$, $B = (3, 1, 0)$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 0$, encontrar los puntos $C \in \pi$ tales que $\widehat{ABC}$ es isósceles. ¿Qué figura geométrica forman?
Dependiendo de la posición relativa de A, B y π, estudiar las soluciones que pueda tener el problema.

C.O.U. Recuperación 2ª Evaluación.

2p ① Demostrar que el producto escalar usual es un producto escalar

2p ② Decir las ecuaciones de dos rectas paralelas entre sí que no lo sean a ningún eje coordenado

1p. ③ Calcular el ángulo que forman los planos

$\pi \equiv 2x - y + 2z + 8 = 0$

$\Sigma \equiv (0,0,2) + \lambda(1,1,1) + \mu(2,-1,3)$

1p ④ Calcular el volumen del tetraedro determinado por los puntos

$(0,1,0)$, $(2,3,1)$, $(-1,5,2)$ y $(8,1,4)$

2p ⑤ Hallar las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas

$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$ $\qquad s \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$

2p. ⑥ Encontrar el simétrico del punto $(2,1,0)$ respecto al plano π

Elevar la calificación.

① Decir las coordenadas de cuatro puntos que formen un tetraedro regular

② Hallar el centro y el radio de la circunferencia $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=5 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Curso de Orientación Universitaria

Examen de segundo parcial para elevar calificación.

Fecha: M. 21. 2. 1984 Tema: "Geometría".

1. Sean $r_1 \equiv \begin{cases} x + 3z + 1 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$,

$r_3 \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - z + 3 = 0 \end{cases}$, $\pi \equiv 2x + 3y + z - 3 = 0$

Demostrar que las tres rectas se cortan en un punto, que llamamos A. Los puntos de corte de r_1, r_2 y r_3 con π son llamados B, C y D respectivamente. Calcular el área del triángulo $\widehat{DBC}$ y el volumen del tetraedro ABCD.

2. Explicar un método para resolver el siguiente problema:

Dadas tres rectas concurrentes, encontrar un plano de modo que el triángulo definido por los puntos de corte sea equilátero.

¿Cuántas soluciones tiene el problema? Demostrarlo.