PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144\ ;\ C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

a) (2 puntos) Identificar C_1 y C_2. Especificar, para una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

b) (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

a) $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow C_1 : \frac{x^2}{\frac{144}{9}} + \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1 \Rightarrow C_1 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow C_1 : \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

C_1 es una elipse con semiejes $a = 4$ y $b = 3$.

Sus vértices son $A = (4, 0)$, $A' = (-4, 0)$, $B = (0, 3)$ y $B' = (0, -3)$

Llamamos c a la semidistancia focal; $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

Los focos son $F = (\sqrt{7}, 0)$ y $F' = (-\sqrt{7}, 0)$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0,6614$ y no tiene asíntotas.

$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow C_2 : \frac{x^2}{\frac{144}{9}} - \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1 \Rightarrow C_2 : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow C_2 : \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

C_2 es una hibérbola con semiejes $a = 4$ y $b = 3$.

Sus vértices son $A = (4, 0)$, $A' = (-4, 0)$, $B = (0, 3)$ y $B' = (0, -3)$

Llamamos c a la semidistancia focal; $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Los focos son $F = (5, 0)$ y $F' = (-5, 0)$. La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1,2$.

Las asíntotas son las rectas $r \equiv y = \frac{3}{4}x$ y $r' \equiv y = -\frac{3}{4}x$

b) La parábola pedida pasa por los puntos $A' = (-4, 0)$, $B = (0, 3)$ y $B' = (0, -3)$ y debe tener ecuación $x = py^2 + qy + r$. Para calcular los tres coeficientes p, q y r sustituimos los puntos A', B y B' en la ecuación y se obtiene un sistema, que resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{l} -4 = r \\ 0 = 9p + 3q + r \\ 0 = 9p - 3q + r \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} r = -4 \\ 9p + 3r = 4 \\ 9p - 3r = 4 \end{array}\right| \; 6r = 0 \Rightarrow r = 0;\;\; 9p = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{9};\left\{\begin{array}{l} p = \frac{4}{9} \\ q = 0 \\ r = -4 \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Solución}}$ La ecuación de la parábola es $x = \frac{4}{9}y^2 - 4$