PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x} & \text{si} \quad x \geq -1 \\ \\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

Se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar el dominio y la continuidad de f.

b) (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

a) $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$ ya que en 0 se anula un denominador.

f es continua en los intervalos abiertos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ y $(0, \infty)$ ya que en cada uno de ellos es una función cociente de funciones continuas en las que no se anula el denominador.

En el punto 0 la función es discontinua porque $0 \notin D(f)$.

Para estudiar la continuidad en -1 hay que recurrir a la definición de continuidad en un punto verificando si se cumplen las tres condiciones:

Primera condición: $f(-1) = \dfrac{(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1}{-1} = 1.$

Segunda condición:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x}{x-1} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2+3x+1}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = 1$$

Tercera condición: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

Se cumplen las tres condiciones, luego f es continua en el punto -1

$\boxed{\text{Solución}}$ $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$ y f es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$

b) Asíntota vertical solo puede tener en el punto de discontinuidad, el 0. Calculamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+3x+1}{x} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+3x+1}{x} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{La recta } x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Calculamos el comportamiento cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$

f no tiene asíntotal horizontal por la derecha.

Si tuviera asíntota oblicua, tendría ecuación $y = mx + n$. Intentamos calcular m y n:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3x+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1-x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x} = 3$$

La recta de ecuación $y = x + 3$ es asíntota oblicua por la derecha.

Calculamos el comportamiento cuando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

La recta de ecuación $y = 2$ es asíntota horizontal por la izquierda.

$\boxed{\text{Solución}}$ La gráfica de f tiene tres asíntotas: $x = 0$, $y = x + 3$ e $y = 2$.

c) Vemos si la gráfica de f corta al eje $y = 0$ en algún punto entre 1 y 2:

$$\frac{x^2+3x+1}{x} = 0 \Rightarrow x^2+3x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \notin [1, 2]$$

Como no corta, el área pedida es

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x} dx = \int_1^2 \left(x + 3 + \frac{1}{x} \right) dx = \left. \frac{1}{2}x^2 + 3x + \ln|x| \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}2^2 + 3 \cdot 2 + \ln 2 - \left(\frac{1}{2} + 3 \right) = 4.5 + \ln 2 = 5.193$$

$\boxed{\text{Solución}}$ El área pedida es $5.193u^2$