# PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.
## Opción A. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Sean las rectas $r : \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\quad s : \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{a} = z \end{cases}$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de $r$ y $s$ según los valores de $a$.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas $r$ y $s$ cuando $a = -2$.

a) Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones implícitas de $r$ obtenemos sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} 3x - 6z = 1 \\ y = -x \end{array} \Bigg| \; z = \frac{1-3x}{-6} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x \;\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

De la ecuación de $r$ se obtiene un punto $P_r = (0, 0, -\frac{1}{6})$ y su vector de dirección $(1, -1, \frac{1}{2})$, aunque es más cómodo tomar su múltiplo $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$.

De la ecuación de $s$ se obtiene un punto $P_s = (0, 1, 0)$ y su vector de dirección $\vec{v}_s = (2, a, 1)$.

Para que los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ sean proporcionales debe ocurrir $\dfrac{2}{2} = \dfrac{-2}{a} = \dfrac{1}{1} \Rightarrow a = -2$

Si $a = -2$, como $P_s \notin r$, las rectas son paralelas.

Si $a \neq -2$, calculamos el producto mixto $[6\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$:

$$[6\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 12 + 2a + 4 - 12 = 2a + 4 \neq 0 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan}$$

$\boxed{\text{Solución}}$ Si $a = -2$, son paralelas; si $a \neq -2$, se cruzan.

b) $d(r, s) = d(P_r, s) = \dfrac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_sP_r}|}{|\vec{v}_s|}$

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_sP_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -2\right) \Rightarrow d(r, s) = \frac{\left|\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -2\right)\right|}{|(2, -2, 1)|} = \frac{\sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{9} + 4}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{53}{9}}}{3} = \sqrt{53} = 7.280u$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $7.280u$