PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción A. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2+2A=I$, donde I denota la matriz identidad.

a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($\det(A)\neq 0$) y expresar A^{-1} en función de A e I.

b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3=pI+qA$.

c) (1 punto) Si $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & k\end{pmatrix}$ cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

a) Suponemos que $|A|=0$ y llegaremos a una contradicción, lo que demostrará que $|A|\neq 0$:

$$A^2+2A=I \overset{(1)}{\Longrightarrow} AA+2IA=I \overset{(2)}{\Longrightarrow} (A+2I)A=I \overset{(3)}{\Longrightarrow} \det((A+2I)A)=\det(I) \overset{(4)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} \det(A+2I)\det(A)=1 \overset{(5)}{\Longrightarrow} \det(A+2I)\cdot 0=1 \overset{(6)}{\Longrightarrow} 0=1 \rightarrow \text{contradicción}$$

(1) → Definición de cuadrado y de I
(2) → El producto de matrices es distributivo respecto a la suma
(3) → Dos matrices iguales tienen el mismo determinante
(4) → El determinante de un producto de matrices es el producto de sus determinantes
(4) → Sabemos que $\det(I)=1$
(5) → Estamos suponiendo que $\det(A)=0$
(6) → Cualquier número multiplicado por 0 da 0

Trasformamos la expresión que da el enunciado para llegar al valor de A^{-1}:

$$A^2+2A=I \overset{(1)}{\Longrightarrow} I=AA+2A \overset{(2)}{\Longrightarrow} IA^{-1}=(AA+2A)A^{-1} \overset{(3)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} A^{-1}=(AA)A^{-1}+2AA^{-1} \overset{(4)}{=} A(AA^{-1})+2I \overset{(5)}{=} AI+2I \overset{(6)}{=} A+2I$$

(1) → Definición de cuadrado
(2) → Multiplicamos por la izquierda por A^{-1}
(3) y (6) → Definición de I
(3) → El producto de matrices es distributivo respecto a la suma
(4) → El producto de matrices es asociativo
(4) y (5) → Definición de matriz inversa

$\boxed{\text{Solución}}$ $|A|\neq 0$ y $A^{-1}=A+2I$

b) Trasformamos la expresión que da el enunciado para llegar al valor de A^3:

$$A^2+2A=I \Rightarrow A^2=I-2A \Rightarrow A^3=(I-2A)A=A-2A^2=A-2(I-2A)=$$

$$=A-2I+4A=-2I+5A$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $p=-2$ y $q=5$

c) Sustituimos en la expresión del enunciado las matrices por sus valores:

$$A^2 + 2A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1+k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+2 & 1+k^2+2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k debe ser solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ k+2 = 0 \\ k+2 = 0 \\ 1 + k^2 + 2k = 1 \end{cases}$$

Evidentemente, $k = -2$ verifica las cuatro ecuaciones.

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad k = -2$