PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

> Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes coordenados y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$.
>
> a) (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.
>
> b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje vertical.

a) Necesitamos la ecuación de la recta t, tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa r. La ordenada del punto de contacto es $y = 4 - r^2$. La pendiente es $y'_{x=r}$:

$$y = 4 - x^2 \Rightarrow y' = -2x \Rightarrow y'_{x=r} = -2r$$

Por tanto la ecuación de t es $y - (4 - r^2) = -2r(x - r)$

Cortando la recta t con los dos ejes de coordenadas calculamos las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo $T(r)$, que llamaremos x_r e y_r:

$$(x_r, 0) \in t \Rightarrow -(4 - r^2) = -2r(x_r - r) \Rightarrow \frac{4 - r^2}{2r} = x_r - r \Rightarrow x_r = \frac{2}{r} + \frac{r}{2}$$

$$(0, y_r) \in t \Rightarrow y_r - (4 - r^2) = -2r(-r) \Rightarrow y_r = r^2 + 4$$

La superficie del triángulo $T(r)$ es

$$S(r) = \frac{1}{2} x_r y_r = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{r} + \frac{r}{2}\right)\left(r^2 + 4\right) = \frac{1}{2}\left(2r + \frac{8}{r} + \frac{r^3}{2} + 2r\right) = \frac{1}{4}\left(r^3 + 8r + \frac{16}{r}\right)$$

Calculamos el mínimo de $S(r)$ resolviendo la ecuación $S'(r) = 0$:

$$S'(r) = \frac{1}{4}\left(3r^2 + 8 - \frac{16}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow 3r^4 + 8r^2 - 16 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 16}}{6} =$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{-8 \pm 16}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{6} \\ \frac{-24}{6} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3} \\ -4 \end{array} \right. \Rightarrow r = \left\{ \begin{array}{l} \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \\ \pm\sqrt{-4} \rightarrow \text{sin solución} \end{array} \right.$$

Como se pide $r > 0$, la única posibilidad es $r = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Comprobamos que la función $S(r)$ tiene un mínimo para ese valor:

$$S''(r) = \frac{1}{4}\left(6r + \frac{32}{r^3}\right) \Rightarrow S''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0 \Rightarrow \text{S tiene un mínimo en } \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad r = 1.155$

b) Necesitamos la ecuación de la recta t, tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa 1.

La ordenada del punto de contacto es $y = 4 - 1^2 = 3$.

La pendiente es $y'_{x=1} = -2$.

Por tanto la ecuación de t es $y - 3 = -2(x - 1)$, que dejamos como $y = -2x + 5$.

La recta t y la parábola se cortan en $x = 1$, luego la superficie pedida es

$$\int_0^1 \left(-2x + 5 - (4 - x^2)\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3} = 0.3333$$

Solución La superficie es $0.3333\ u^2$