

Opción B. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

$$\text{Sean las matrices } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Calcular A^{-1} .

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

a) Para saber si la matriz A tiene inversa calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A^t) = -\text{adj}(A^t)$$

Calculamos la matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
----------	--

b) Averiguamos cómo calcular X :

$$AX = BA \xrightarrow{(1)} A^{-1}(AX) = A^{-1}(BA) \xrightarrow{(2)} (A^{-1}A)X = A^{-1}(BA) \xrightarrow{(3)} \\ \xrightarrow{(3)} IX = A^{-1}(BA) \xrightarrow{(4)} X = A^{-1}(BA)$$

(1) \rightarrow Multiplicamos por la izquierda por A^{-1}

(2) \rightarrow El producto de matrices es asociativo

(3) \rightarrow Definición de matriz inversa, siendo I la matriz identidad

(4) \rightarrow Definición de matriz identidad

Solo queda hacer las operaciones:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución $X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$