PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción B. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

a) (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.

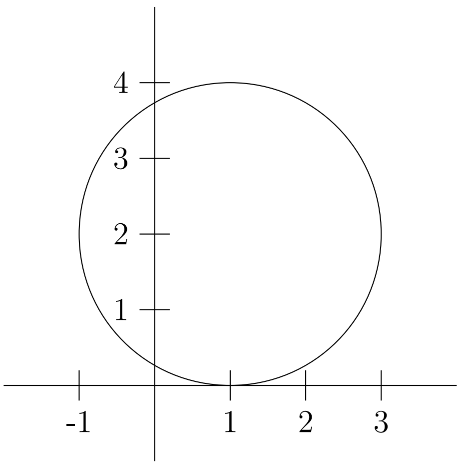
b) (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

c) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3,0)$ razonando la respuesta.

a) Transformamos la ecuación de la circunferencia para obtener el centro y el radio:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

El centro es el punto $C = (1,2)$ y el radio es $R = 2$



b) Sustituimos $x = 0$ en la ecuación de la circunferencia para obtener la ordenada:

$$x = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \Rightarrow (y-2)^2 = 3 \Rightarrow y - 2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{3}$$

El punto más alejado del origen tendrá ordenada $y = 2 + \sqrt{3}$, luego es $A = (0, 2+\sqrt{3})$

La pendiente de la recta que une los puntos A y C es $m_{AC} = \dfrac{2+\sqrt{3}-2}{0-1} = -\sqrt{3}$, luego la recta t tangente a la circunferencia en el punto A, por ser perpendicular a la recta que pasa por A y C, tiene pendiente $m_t = \dfrac{-1}{m_{AC}} = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Como ya tenemos la pendiente y la ordenada en el origen de t, $t \equiv y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 2 + \sqrt{3}$

c) Las tangentes pedidas son el eje de abscisas $t_1 \equiv y = 0$ y la recta vertical $t_2 \equiv x = 3$, ya que ambas rectas verifican que su distancia hasta el punto C, centro de la circunferencia, es igual a 2, el radio.