

Opción B. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se considera la función  $f(x) = xe^{3x}$ .

- a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función  $f$ .
- b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de  $f$  y el eje  $OX$  entre  $x = 0$  y  $x = p$  ( $p > 0$ ) vale  $\frac{1}{9}$ , calcular el valor de  $p$ .

- a)  $D(f) = \mathbf{R}$ ,  $f$  no es par ni impar, es continua por ser producto y composición de funciones continuas. Calculamos los puntos de corte con los ejes:

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \in \text{Graf}(f)$$

$$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow xe^{3x} = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0) \in \text{Graf}(f)$$

$f$  no tiene asíntotas verticales por ser continua.

Estudiamos el comportamiento cuando  $x \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{3x} = \infty \rightarrow f \text{ no tiene asíntota horizontal por la derecha}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{3x} = \infty \rightarrow f \text{ no tiene asíntota oblicua por la derecha}$$

Estudiamos el comportamiento cuando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-3e^{-3x}} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow$  la recta  $y = 0$  es asíntota horizontal por la izquierda

Calculamos las coordenadas de los extremos relativos:

$$f(x) = xe^{3x} \Rightarrow f'(x) = 1e^{3x} + x3e^{3x} = (3x + 1)e^{3x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (3x + 1)e^{3x} = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) = (3x + 1)e^{3x} = 0 \Rightarrow f''(x) = 3e^{3x} + (3x + 1)3e^{3x} \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{3}\right) > 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f$  tiene un mínimo relativo en  $x = -\frac{1}{3}$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}e^{3\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3}e^{-1}$$

$f$  tiene un mínimo relativo en el punto  $(-0.33, -0.12)$

Calculamos las coordenadas de los puntos de inflexión:

$$f''(x) = 3e^{3x} + (3x + 1)3e^{3x} = (3 + 9x + 3)e^{3x} = (9x + 6)e^{3x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (9x + 6)e^{3x} = 0 \Rightarrow 9x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

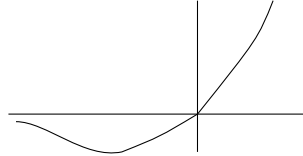
$$f''(x) = (9x + 6)e^{3x} = 0 \Rightarrow f'''(x) = 9e^{3x} + (9x + 6)3e^{3x} \Rightarrow f''' \left( -\frac{2}{3} \right) \neq 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f$  tiene un punto de inflexión  $x = -\frac{2}{3}$

$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = f \left( -\frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3} e^{3 \left( -\frac{2}{3} \right)} = -\frac{2}{3} e^{-2}$$

$f$  tiene un punto de inflexión en el punto  $(-0.67, -0.09)$

Al estar el mínimo relativo y el punto de inflexión tan próximos entre sí y al eje de abscisas, la representación gráfica debe ser aproximada:



b) Ya que la gráfica de  $f$  no corta al eje de abscisas en ningún punto entre 0 y  $p$ , el área de la región se calcula como  $\int_0^p f$ .

Calculamos una primitiva de  $f$  usando el método de integración por partes:

$$\int x e^{3x} dx \stackrel{(1)}{=} x \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} = \left( \frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3x}$$

$$(1) \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{cases}$$

Calculamos la integral definida:

$$\int_0^p f = \left( \frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3x} \Big|_0^p = \left( \frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3p} - \left( \frac{0}{3} - \frac{1}{9} \right) e^0 = \left( \frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3p} + \frac{1}{9}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\int_0^p f = \frac{1}{9} \Rightarrow \left( \frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3p} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \left( \frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3p} = 0 \Rightarrow \frac{p}{3} - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \frac{p}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Solución	$p = \frac{1}{3}$
----------	-------------------