

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir **UNA Y SOLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

- (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.
- (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad $\int_0^a f(x) dx = 1$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

- (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.
- (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

- (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ .
- (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.
- (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} ; \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

- (1 punto) Calcular la distancia entre r y s .
- (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.
- (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos.) Para cada valor del parámetro real a , se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2 \quad ; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1 \quad ; \quad \pi_3 : ax + y + z = 3.$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
- (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n .

Se pide:

- (1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A .
- (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I , para cualquier número natural n .
- (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos.) Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f(1) = 2 \quad ; \quad f'(0) = 3 \quad ; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

- (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.
- (2 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$.