PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción A. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

b) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3,1).

a) Consideramos las funciones $f_1(x) = x(x-2)$ y $f_2(x) = \sqrt[3]{x-2}$, que forman parte de la definición de la función f.

Como f_1 y f_2 son continuas, f es continua en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$.

Como f_1 y f_2 son continuas, f será continua en 2 cuando $f_1(2) = f_2(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 0 \\ f_2(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(2) = f_2(2) \Rightarrow f \text{ es continua en } 2.$$

Por tanto f es continua.

Como f_1 es derivable y f_2 es derivable en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$, f es derivable en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$.

Para estudiar la derivabilidad de f en el punto 2 recurrimos a la definición de derivada y comenzamos por calcular la derivada por la derecha:

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_2(2+h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{2+h-2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty \Rightarrow f \text{ no es derivable en } 2.$$

$\boxed{\text{Solución}}$ f es continua. f es derivable en $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$

b) $f(3) = 1$, luego efectivamente el punto $(3, 1)$ pertenece a la gráfica de f.

$$f_2(x) = \sqrt[3]{x-2} = (x-2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f_2'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$$

La pendiente de la recta tangente vendrá dada por la derivada:

$$f'(3) = f_2'(3) = \frac{1}{3}(3-2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente es $y - 1 = \frac{1}{3}(x-3) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$

$\boxed{\text{Solución}}$ $y = \frac{1}{3}x$

Creado con LaTeX. Licencia: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/es/