PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción B. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2 \;;\; \pi_2 : x + ay + z = -1 \;;\; \pi_3 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

a) Para que tres planos tengan una recta común debe ocurrir que el sistema de ecuaciones formado por sus tres ecuaciones sea compatible indeterminado con un grado de libertad. Por tanto, estudiamos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + az = -2 \\ x + ay + z = -1 \\ ax + y + z = 3 \end{array}\right.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A|A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Hay que calcular los valores de a que hacen $rg(A) = rg(A^*) = 2$

$$det(A) = a + a + a - a^3 - 1 - 1 = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)(a^2 + a - 2) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a - 1 = 0 \\ a^2 + a - 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow a = \left\{\begin{array}{r} 1 \\ -2 \end{array}\right.$$

$a = 1 \Rightarrow rg(A) = 1$, luego $a = 1$ no nos vale.

$a = -2 \Rightarrow rg(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Para calcular $rg(A^*)$ intentamos ampliar este menor de orden 2 con la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2 - 2 + 8 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $a = -2$

b) Para $a=-2$ el sistema es equivalente al siguiente, que resolvemos dejando x e y en función de z.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=-2+2z \\ x-2y=-1-z \end{array}\right. \quad \Big| \quad 3y=-1+3z \Rightarrow y=-\frac{1}{3}+z$$

$$x+y=-2+2z \Rightarrow x=-y-2+2z=\frac{1}{3}-z-2+2z=-\frac{5}{3}+z$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{5}{3}+\lambda \\ y=-\frac{1}{3}+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbf{R})$