	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**) Curso **2003-2004** **MATERIA** MATEMÁTICAS II	Junio Septiembre R1 R2

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.
Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

a) (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.
b) (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x)dx$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (1-a)x - 2y + 4z & = & 0 \\ x - (1+a)y + z & = & 0 \\ -x + ay - z & = & 0, \end{array} \right.$$

a) (1,5 puntos) Estudiar la compatibilidad según los valores del parámetro a.
b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.
Se consideran la recta y los planos siguientes :

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{array} \right. \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0 \quad ; \quad \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0.$$

Se pide:
a) (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.
b) (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.
c) (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

se pide:
a) (1 punto) Hallar A^{-1}.
b) (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.
a) (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 1 \\ 3x - y & = & 2 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.
b) (1 punto)Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y - z & = & 1 \\ x + y + 2z & = & 1 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las dos anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado .

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.
a) (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$$\begin{array}{rcrr} \pi_1 & \equiv & 2x + 3y + kz = & 3 \\ \pi_2 & \equiv & x + ky - z = & -1 \\ \pi_3 & \equiv & 3x + y - 3z = & -k. \end{array}$$

b) (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

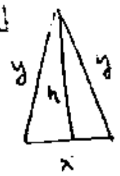
Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:
a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.
b) (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
c) (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

SOLUCIONES SUNIC

OPCIÓN A

MATEMÁTICAS II

A1)



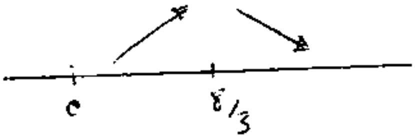
$x + 2y = 8$

$y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = h^2$

Area $= \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{8-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} =$

$= \ldots = x\sqrt{4-x} \equiv f(x)$.

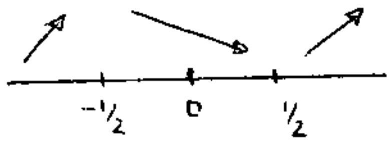
$f'(x) = \ldots = \dfrac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} \rightsquigarrow$



Máximo en $x = 8/3$ (por tanto, $y = 8/3$, $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$).

A2) a) No hay asíntotas verticales. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Asíntota horizontal $y = 1$ (en $+\infty$ y en $-\infty$).

$f'(x) = \ldots = \dfrac{4(4x^2-1)}{(4x^2+1)^2}$.



Máx: $(-1/2, 2)$

Mín: $(1/2, 0)$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = \left[x - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\right]\Big|_{x=0}^{1} = 1 - \frac{1}{2}\ln 5$.

A3) $M = \begin{pmatrix} (1-a) & -2 & 4 \\ 1 & -(1+a) & 1 \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$.

a) $\det M = -(a+3)$. $a \neq -3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado: sólo tiene la solución trivial.

$a = -3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b) $a = -3 \Rightarrow x = -z,\ y = 0,\ z$ arbitrario.

A4) a) $r \cap \pi_1 \equiv 0 = 2 - 3(2-3\lambda) + 2(1+2\lambda) - (4-\lambda) = \ldots = -6 + 14\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{3}{7}$.

r y π_1 se cortan en $P_1(5/7, 13/7, 25/7)$.

$r \cap \pi_2 \equiv 0 = 3 + 2(2-3\lambda) + 2(1+2\lambda) - 2(4-\lambda) = \ldots = 1$. Imposible.

r es paralela a π_2.

b) π_1 y π_2 se cortan a lo largo de una recta.

Además, $\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0$, de modo que se cortan perpendicularmente.

c) $d(r, \pi_2) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

OPCION B

B1 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ || b) $X = A^{-1} B (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

B2 a) Teniendo en cuenta que la solucion del sistema $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ es $(5/7, 1/7)$, será válida cualquier ecuación $Ax+By=C$, donde $A \cdot 5/7 + B\, 1/7 = C$.

b) La tercera ecuación será cualquiera de la forma
$(2A+B)x + (2A+B)y + (-A+2B)z = (A+B)$, con $A+B=1$.

B3 $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & K \\ 1 & K & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $M_A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & K & 3 \\ 1 & K & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -K \end{pmatrix}$.

a) $\det M = 2 - 5K - 3K^2 = 0 \iff \begin{cases} K=-2 \\ K=1/3 \end{cases}$

$K \neq -2$, $K \neq 1/3 \rightsquigarrow$ los 3 planos se cortan en 1 punto.

$K=-2 \rightsquigarrow \ldots$ Rango M_A = Rango $M = 2$. Se cortan a lo largo de una recta.

$K = 1/3 \rightsquigarrow \ldots$ Rango $M_A = 3 > 2$ = Rango M. No tienen puntos comunes. Puede observarse que π_2 y π_3 son paralelos.

b) Recta común (caso $K=-2$): $r \equiv \begin{cases} 2x+3y-2z=3 \\ x-2y-2z=-1 \end{cases}$. Vector director: $\vec{v}_r = (1,0,$

B4 a) $f'(a) = -2a$. $y - f(a) = -2a(x-a) \Rightarrow y = 1 + a^2 - 2ax$.

b) $A(0, 1+a^2)$; $B\left(\frac{1+a^2}{2a}, 0\right)$.

c) $P(a, 1-a^2)$

$d(A,P) = 2\, d(B,P) \iff \ldots \iff a\sqrt{1+4a^2} = \frac{1-a^2}{a}\sqrt{1+4a^2} \iff a^2 = \frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} a^2 = 1/2 \\ a \in (0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$