UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Curso **2003-2004**

MATERIA MATEMÁTICAS II

Junio
Septiembre
R1 R2

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.
b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.
a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A ?
b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.
Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$.
a) (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0,0,0)$ respecto de π.
b) (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje $0Z$.
c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.
Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7),$$

a) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
b) (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.
c) (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f ? Justificar razonadamente la respuesta.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.
a) (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.
b) (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.
El plano $\pi \equiv 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:
a) (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
b) (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
c) (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.
Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
a) (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abecisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.
a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & 3y & + & z & = & \lambda \\ x & + & \lambda y & + & \lambda z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1. \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$.

SEPT.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Apartado a): 1 punto. Apartado b): 0,5 puntos planteamiento, 0,5 puntos resolución.

Ejercicio 2. Apartado a): 1 punto. Apartado b): 1 punto.

Ejercicio 3. Apartado a): 0,5 puntos planteamiento, 0,5 puntos resolución. Apartado b): 0,5 puntos planteamiento, 0,5 puntos resolución. Apartado c): 0,5 puntos planteamiento, 0,5 puntos resolución.

Ejercicio 4. Apartado a): 1 punto. Apartado b) 1 punto. Apartado c): 1 punto.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Apartado a) : 1 punto planteamiento, 0,5 puntos resolución. Apartado b): 0,5 puntos.

Ejercicio 2. Apartado a): 0,5 puntos. Apartado b): 0,5 puntos. Apartado c): 1 punto.

Ejercicio 3. Apartado a): 0,5 puntos por los máximos y mínimos, 0,5 puntos por las asíntotas. Apartado b): 1 punto. Apartado c): 0,5 puntos planteamiento, 0,5 puntos resolución.

Ejercicio 4. Apartado a): 1 punto por el cálculo correcto de los rangos, 1 punto por la discusión. Apartado b): 1 punto.

Soluciones MATEMÁTICAS II **SEPT.**

Cuestiones OPCIÓN A

a1) a.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$X = B^{-1}A = \ldots = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -11/3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

a2) a.

det (A·B) = det A · det B; por tanto , si $A^2=0$, debe ser det A =0.

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (3-k)^2-4 & 8k-8 \\ 3-2k-1 & -4+(1+k)^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k=1$$

a3)a. Recta perpendicular a Π y que pasa por (0,0,0): $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

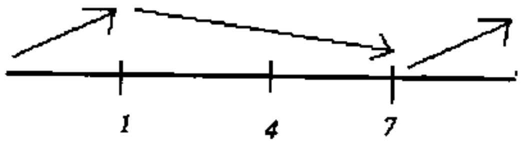
$\Pi \wedge \Gamma \rightarrow Q$ (3/7, 6/7, 9/7) $\equiv$ punto medio del segmento 00′.

Por tanto, O′ (6/7, 12/7, 18/7).

b) $O = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x-y.$

c) $\mathrm{Vol} = 1/6 \left| \det \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = 6$

[a4)]a)



$f'(x) = (x-4)^2\,(x^2-8x+7) = (x-4)^2\,(x-7)(x-1)$

b) Máximo relativo en x=1; minimo relativo en x=7.

c)

$$\left.\begin{array}{l} f'(4)=0 \\ \text{f decreciente en } (1,7) \\ \text{(f continua y derivable} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{En } x=4 \text{ debe haber un punto de inflexión.}$$

Solución alternativa : comprobar $f'(4) = f''(4) = 0 \neq f'''(4)$.

Soluciones MATEMÁTICAS II **SEPT.**

Cuestiones OPCION B

B1) a.- Punto genérico del plano z = 0 : (x,y,0)

$$3= d((x,y,0);\Pi) = \frac{|2x-y-4|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|2x-y-4|}{3} = \begin{cases} 2x-y=13 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas.

$$\begin{cases} 2x-y=13 \\ z=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda-13 \\ z=0 \end{cases}$$ y también:

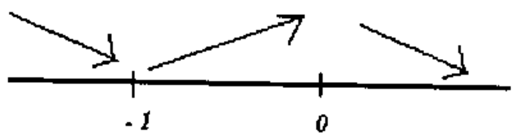
$$\begin{cases} 2x-y=-5 \\ z=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=2\mu+5 \\ z=0 \end{cases}$$

B2) a.- d(0, Π) = 2/3

b.- $\overrightarrow{n_r} = (2,-2,1) \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

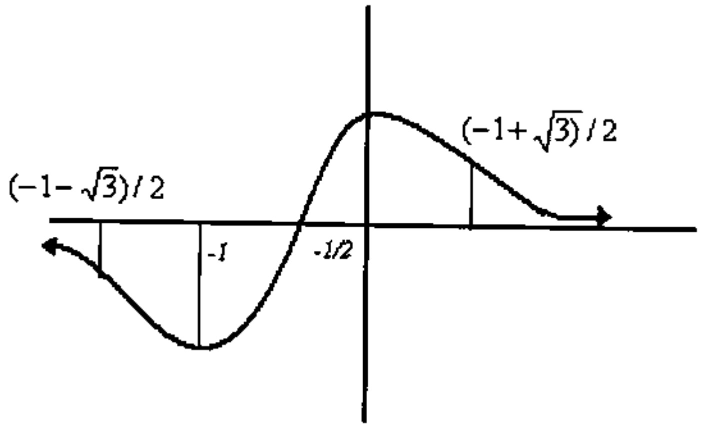
c.- $1/3\ (5\cdot 2/3) = \text{Vol} = 1/6 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2/6 \rightarrow \ldots\rightarrow 5=9/6=3/2$

B3) a.- $f'(x) = \ldots = \dfrac{-6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}$



$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)=0$ ->Asíntota horizontal (a la derecha e izquierda) y=0. No hay asíntotas verticales. Máximo local y absoluto en x=0; mínimo local y absoluto en x= -1 .

b)



c) Area = $\int_0^2 f(x)dx = ... = \dfrac{-1}{x^2+x+1} \Big|_{x=0}^{2} = 6/7$

B4)

M= $\begin{pmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\qquad$ $M_A = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a.- det M = …. = $-2\lambda^2+2\lambda+4=0$ -> $\lambda=2, -1$ // Si $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq 1$,sistema compatible determinado

$\lambda = -1$ -> Rango M=2 =Rango M_A. Sistema Compatible Indeterminado.
$\lambda = 2$ -> Rango M=2 =Rango M_A. Sistema Compatible Indeterminado.

b.- $\lambda = 2$ -> $\begin{cases} x=1+4z \\ y=-3z \\ z.arbitrario \end{cases}$