UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**)
Curso **2004-2005**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Junio
Septiembre
R1 R2

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se premite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

2. (2 puntos). Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:
   i) tiene un máximo relativo en $x = 1$.
   ii) tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0,1)$.
   iii) se verifica:
$$\int_0^1 p(x)dx = 5/4$$

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = 3 \\ mx + (m-1)y + 3z = 2m-1 \\ x + 2y + (m-2)z = 4 \end{cases}$$
   a) (1,5 puntos). Discutirlo según los distintos valores de m.
   b) (1,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

4. (3 puntos). Dado el punto $P(1,3,-1)$, se pide:
   a) (1 punto). Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.
   b) (2 puntos). Calcular los puntos de la recta:
$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$
   cuya distancia a P es igual a 3.

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). a) (1 punto). Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$$

   b) (1 punto).Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación:

$$5x+y+\alpha z=\beta$$

   el sistema resultante sea compatible indeterminado.

2. (2 puntos). Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}\,X\,A = B$$

   siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (3 puntos). Calcular los siguientes límites:

   a) (1,5 puntos)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} \right)$$

   b) (1,5 puntos)

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\operatorname{arctg}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right]$$

4. (3 puntos). Dadas las rectas:

$$r:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4} \qquad s:\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

   a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

   b) (1,5 puntos). Calcular la mínima distancia entre r y s.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

1. Planteamiento: 1 punto
   Obtener el valor de la integral: 1 punto

2. Planteamiento: 1 punto
   Obtención del polinomio: 1 punto.

3. Apartado a): 1,5 puntos
   Apartado b): 1,5 puntos

4. Apartado a) 1 punto
   Apartado b) 2 puntos

OPCIÓN B

1. Apartado a): 1 punto
   Apartado b): 1 punto

2. Despejar X: 1 punto.
   Cálculo de la matriz X: 1 punto.

3. Apartado a): 1 punto
   Apartado b): Aplicación correcta de la regla de l'Hopital, 1,5 puntos
   Cálculo del límite: 0,5 puntos

4. Apartado a): 1,5 puntos.
   Apartado b): 1,5 puntos

Opción A

① $$1 = \int_0^1 \underbrace{2x}_{u} \underbrace{f'(x)\,dx}_{dv} = \left[2x f(x)\right]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow \boxed{\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}}$$

② $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p''(x) = 6ax + 2b$

$\int_0^1 p(x)\,dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \cancel{\frac{bx^3}{3}} + \frac{cx^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{5}{4}$

$p(0) = 1 \Rightarrow d = 1$

$p'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

$p''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow a + 2c =$

$a = -\frac{1}{5}$; $b = 0$; $c = \frac{3}{5}$; $d = 1$

$$\boxed{p(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1}$$

③ $$\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & 3 \\ 1 & 2 & m-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^3 - 5m^2 + 2m + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$$

$m \notin \{-1, 2, 4\}$ S. Comp. Det.

$m = -1$ $rg(A) = 2$

$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; $rg(B) = 3$

S. Incompatible

$m = 2$ $rg(A) = 2$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $rg(B) = 3$

S. Incompatible

$m = 4$ $rg(A) = 2$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $rg(B) = 2$

S. Comp. Indet.

<u>Solución $m = 4$</u>

$$\boxed{x = \frac{2}{5} \; ; \; y = \frac{9}{5} - \lambda \; ; \; z = \lambda}$$

④ a) $\boxed{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9}$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 2z + 2 = 0$

b) $(3\lambda - 1)^2 + (\lambda - 2)^2 + (2 - 4\lambda)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

$\lambda = 0$:	A $(0, 1, 1)$
$\lambda = 1$:	B $(3, 2, -3)$

* Opción B *

① a) $\boxed{\begin{cases} x = 1+5\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}}$ b) $\boxed{\begin{matrix} \alpha = -6 \\ \beta = 5 \end{matrix}}$

---

② $X = A\cdot B\cdot A^{-1}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\boxed{X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}}$

---

③ a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \boxed{1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\operatorname{arctg}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} e^x - \pi/2}{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-1/x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2 e^x}{1+e^{2x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2xe^x - x^2e^x}{2e^{2x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x-x^2}{2e^x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2-2x}{2e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2}{2e^x} = \boxed{0}$

---

④ a) $\vec{u}\,(2,3,4)$ $\vec{u}\wedge\vec{v} = (10,0,-5) = 5(2,0,-1)$; $\overrightarrow{AB}(-2,1,-1)$

$\vec{v}\,(1,-1,2)$

$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$-3x + 10y - 6z - 1 = 0$ $x + 5y + 2z - 9 = 0$

$\boxed{t \begin{cases} -3x+10y-6z-1=0 \\ x+5y+2z-9=0 \end{cases}}$

b)

$d(r,s) = \dfrac{\left|[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}]\right|}{|\vec{u}\wedge\vec{v}|} = \dfrac{15}{5\sqrt{5}} = \boxed{\dfrac{3}{\sqrt{5}}\,u}$
