UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**)

Curso **2005-2006**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

6

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio figura en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN **A**

1. (2 puntos). Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.

2. (2 puntos). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$.

3. (3 puntos). a) (1 punto). Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) (1 punto). Demostrar que la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 (a_{n+1} - a_n)$.

4. (3 puntos). Sean las rectas:

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

a) (1,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

OPCIÓN **B**

1. (2 puntos). Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\mathbf{v} = (4,3,1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano π: $z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

2. (2 puntos). Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r: \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s: \begin{cases} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

3. (3 puntos). Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos). Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.
b) (1,5 puntos). Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

4. (3 puntos). a) (1,5 puntos). Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

b) (1,5 puntos). Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

1. Discusión: 1 punto.
   Resolución de todos los casos: 1 punto.

2. Planteamiento: 0,5 puntos.
   Resolución: 1,5 puntos.

3. Apartado a): 1 punto.
   Apartado b): 1 punto.
   Apartado c): 1 punto.

4. Apartado a): Planteamiento, 1 punto. Resolución, 0,5 puntos.
   Apartado b): 1,5 puntos.

OPCIÓN B

1. Planteamiento: 1 punto.
   Resolución: 1 punto.

2. Planteamiento: 1 punto.
   Resolución: 1 punto.

3. Apartado a): Planteamiento, 0,75 puntos. Discusión, 0,75 puntos.
   Apartado b): Cálculo de los valores de a, 0,5 puntos. Cálculo de la matriz inversa, 1 punto.

4. Apartado a): 1,5 puntos.
   Apartado b): Planteamiento, 1 punto. Resolución, 0,5 puntos.

MATEMÁTICAS II

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. $\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} k=-1 \\ k=2 \end{matrix}}$

$k=-1 \Rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ -x-y+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{matrix}}$; $k=2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=-5\lambda \end{matrix}}$

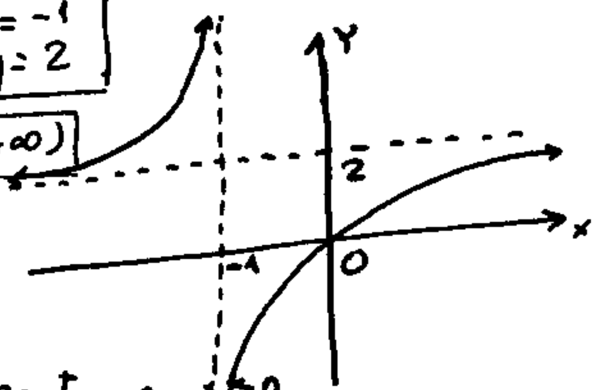
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} a+2c=a \\ b+2d=2a+b \\ d=2c+d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} c=0 \\ a=d \\ b \end{matrix} \Rightarrow \boxed{P=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}}$$

3. a) $y=\dfrac{2x}{x+1}$; $\boxed{D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}}$ $\boxed{\begin{matrix} \text{A. vert. } x=-1 \\ \text{A. horiz. } y=2 \end{matrix}}$

$y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ $\boxed{\text{creciente: } (-\infty,-1) \text{ y en } (-1,+\infty)}$

$y''=\dfrac{-2}{(x+1)^3}$ $\boxed{\begin{matrix} \text{convexa } \cup : (-\infty,-1) \\ \text{cóncava } \cap : (-1,+\infty) \end{matrix}}$



b) $n'>n \Rightarrow \dfrac{2n'}{n'+1} > \dfrac{2n}{n+1}$ por ser $f(x)$ creciente en $x>0$.

c) $a_{n+1}=\dfrac{2n+2}{n+2}$, $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2}{n^2+3n+2} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)=2}$

4. $A(-1,2,0)$, $\vec{v}_r=(1,-1,2)$; $B(2,-1,-2)$, $\vec{v}_s=(3,1,1)$; $\vec{AB}=(3,-3,-2)$

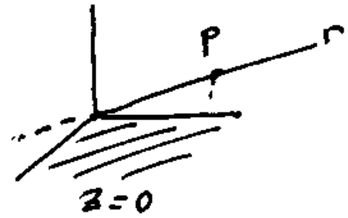
a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{t \begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ x-8y+5z=0 \end{cases}}$

b) $\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (-3,5,4)$

$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{t' \begin{cases} 7x+5y-z-3=0 \\ x+15y-18z-5=0 \end{cases}}$

OPCIÓN B

1. $P(4\lambda, 3\lambda, \lambda)$



$\text{proy}_{\pi}(P) = Q(4\lambda, 3\lambda, 0)$; área $(\widehat{OPQ}) = \frac{1}{2} |\vec{OP} \wedge \vec{OQ}|$

$\vec{OP} \wedge \vec{OQ} = (-3\lambda^2, 4\lambda^2, 0)$; $|\vec{OP} \wedge \vec{OQ}| = 5\lambda^2$

$\frac{5\lambda^2}{2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$

Soluciones posibles: $\boxed{P_1\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) ; P_2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)}$

---

2. $A(-4,7,0)$, $\vec{v_r} = (-3,4,1)$ $\quad \vec{v_s} = -3\vec{v_r}$; $A \notin s$

$\vec{v_s} = (9,-12,-3)$

$\boxed{\text{son rectas paralelas no coincidentes}}$

---

3. a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = -2a^3 + 2a = 0 \Rightarrow a=0,\ a=1,\ a=-1$

$\boxed{\begin{array}{l} a \notin \{-1,0,1\},\ rg(M)=3 \\ a=0,\ rg(M)=2 \\ a=1,\ rg(M)=2 \\ a=-1,\ rg(M)=2 \end{array}}$

b) Existe M^{-1} para $a \notin \{-1,0,1\}$

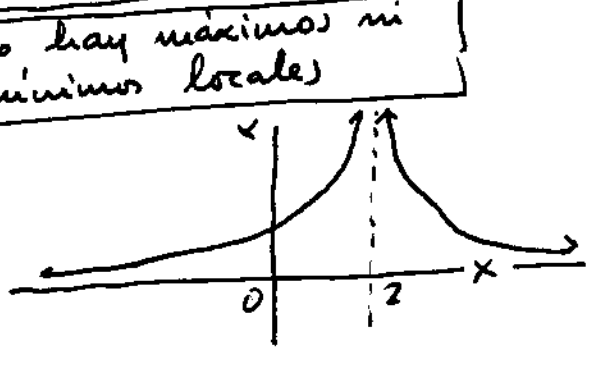
$a=2 \Rightarrow \det(M) = -12 \Rightarrow$ $\boxed{M^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}}$

---

4. a) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ $\quad \boxed{D = \mathbb{R} - \{2\}}$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} \text{A. vertical: } x=2 \\ \text{A. Horizontal: } y=0 \end{array}}$

$f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^3}$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} \text{creciente en } (-\infty, 2) \\ \text{decreciente en } (2, +\infty) \end{array}}$

$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^4}$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} \text{no hay P. Inflexión} \\ \text{convexa } \cup \text{ en} \\ (-\infty, 2) \text{ y en } (2, +\infty) \end{array}}$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} \text{no hay máximos ni} \\ \text{mínimos locales} \end{array}}$



b) $\text{área} = \left| \int_{5/2}^{3} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) dx \right| =$

$= \left| -\frac{1}{x-2} - x \right|_{5/2}^{3} = \boxed{\frac{1}{2} u^2}$