PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2006. Examen de septiembre.

Opción A. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

a) Consideramos las funciones $f_1(x) = 3x + 2$, $f_2(x) = x^2 + 2a\cos x$ y $f_3(x) = ax^2 + b$ que forman parte de la definición de la función f.

Como f_1, f_2 y f_3 son continuas, f es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, \pi)$ y (π, ∞).

Como f_1 y f_2 son continuas en 0, f será continua en 0 cuando $f_1(0) = f_2(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(0) = 2 \\ f_2(0) = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = 2a \Rightarrow a = 1$$

Como f_2 y f_3 son continuas en π, f será continua en π cuando $f_2(\pi) = f_3(\pi)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_2(\pi) = \pi^2 - 2a \\ f_3(\pi) = a\pi^2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \pi^2 - 2a = a\pi^2 + b \Rightarrow \pi^2 - 2 = \pi^2 + b \Rightarrow b = -2$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $a = 1$ y $b = -2$

b) Para los valores obtenidos en el apartado anterior la función queda definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+2\cos x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ x^2-2 & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

Consideramos las funciones $f_1(x) = 3x+2$, $f_2(x) = x^2+2\cos x$ y $f_3(x) = x^2-2$ que forman parte de la definición de la función f.

Como f_1, f_2 y f_3, son derivables, f es derivable en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, \pi)$ y (π, ∞).

Utilizando las reglas de derivación, calculamos $f_1'(x) = 3$, $f_2'(x) = 2x - 2\operatorname{sen} x$ y $f_3(x) = 2x$

Como f_1 y f_2 son derivables, f será derivable en 0 cuando $f_1'(0) = f_2'(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1'(0) = 3 \\ f_2'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ no es derivable en } 0$$

Como f_2 y f_3 son derivables, f será derivable en π cuando $f_2'(\pi) = f_3'(\pi)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_2'(\pi) = 2\pi \\ f_3'(\pi) = 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es derivable en } \pi$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad f$ es derivable en $\mathbf{R} - \{0\}$